АВТОМОРФИЗМЫ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

ИЗДАТЕЛЬСТВО "М И Р" МОСКВА


ИЗДАТЕЛЬСТВО
•МИР•

АВТОМОРФИЗМЫ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

Сборник переводов
с английского и французского

Под редакцией
Ю. И. МЕРЗЛЯКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1976

УДК 519.4

Теория автоморфизмов классических групп — обширная область теории линейных групп, которая активно развивается в последние годы, но почти не отражена в литературе на русском языке. Настоящий сборник восполняет этот пробел. В книгу включены „Лекции о линейных группах" О'Миры с изложением его метода вычетных пространств, доклад Титса на Международном конгрессе математиков 1970 г., статьи Янь Ши-цзяня, Джонсона и других авторов, отражающие современное состояние всех основных разделов теории. В заключение приводится обзор новейших результатов и полная библиография по теории автоморфизмов классических групп.

Книга будет полезной специалистам по алгебре, геометрии и анализу, а также преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов университетов и пединститутов.

Редакция литературы по математическим наукам

АВТОМОРФИЗМЫ
КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

Редактор *Г. М. Цукерман*. Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*. Технический редактор *А. Д. Хомяков*
Корректоры *Л. В. Байкова, В. И. Киселева*

Сдано в набор 22/III 1976 г. Подписано к печати 16/IX 1976 г. Бумага тип. № 1
60×90[1]/[16]=8,25 бум. л. Печ. л. 16,50 Уч.-изд. л. 14,19 Изд. № 1/8623 Цена 1 р. 42 к.
Зак. 154

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
129820, Москва, И-110, ГСП
1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

А $\frac{20203-001}{041\,(01)-76}$ 01—76

ПРЕДИСЛОВИЕ

В теории автоморфизмов классических групп за последние 10 лет произошли существенные сдвиги: на смену старым методам, основанным на изучении инволюций и почти исчерпавшим себя, пришли новые методы, применимые к группам, не содержащим ни одной инволюции, а именно таковы многие ортогональные группы и конгруэнц-группы. Наряду с этим изучение классических групп над полями переросло в изучение их над произвольными областями целостности и над кольцами, еще более далекими от полей, а вместо автоморфизмов все чаще исследуются изоморфизмы и произвольные гомоморфизмы.

Настоящий сборник составлен из работ зарубежных авторов, отражающих современное состояние всех основных разделов теории.

Почти половину книги занимают „Лекции о линейных группах" О'Миры, в которых излагается его замечательный метод вычетных пространств. Изобретенный О'Мирой в 1967 г. как средство изучения автоморфизмов „плохих" ортогональных групп, этот метод излагается в „Лекциях" для простейшего семейства классических групп — общей линейной и специальной линейной групп и их проективных образов. В качестве одного из применений выводится более ранний результат О'Миры — описание автоморфизмов групп $\boldsymbol{GL}_n$ и $\boldsymbol{SL}_n$ над произвольными областями целостности. Изложение полностью замкнуто и очень прозрачно, а имеющиеся в каждой главе литературные указания позволят читателю легко ориентироваться в последних журнальных публикациях.

Другой подход к проблеме автоморфизмов над областями целостности читатель найдет в работе Янь Ши-цзяня, в которой дается описание автоморфизмов группы $\boldsymbol{EL}_n$, порожденной элементарными матрицами. Метод Яня, более вычислительный и не столь изящный, как метод О'Миры, в дальнейшем оказался, однако, очень полезным при изучении автоморфизмов над кольцами с делителями нуля.

Начиная с самых первых работ и кончая совсем недавними, важную роль в исследовании автоморфизмов классических

групп играет основная теорема проективной геометрии. Переходя к полям частных, мы получаем возможность использовать ее и в случае линейных групп над областями целостности. С другой стороны, естественно возникает мысль обобщить саму эту теорему на коммутативные кольца, с тем чтобы в дальнейшем сделать уже ненужным переход к полям. Такое обобщение основной теоремы проективной геометрии дано в статье Оянгурена и Сридхарана.

Центральное место в докладе Титса на Международном конгрессе математиков 1970 г. занимают общие теоремы Бореля и Титса об автоморфизмах простых изотропных алгебраических групп, которые поглощают многочисленные более ранние результаты и в значительной степени завершают теорию автоморфизмов классических групп над полями. Заметим, однако, что этими теоремами не покрывается анизотропный случай.

Описание автоморфизмов унитарных групп степени $n \geqslant 3$ над бесконечными полями закончено в работе Джонсона. Оно получено новым единым методом — в отличие от более ранних работ, когда рассуждения существенно зависели от индекса Витта.

В работе Помфрэ и Макдональда найдены автоморфизмы группы GL_n над локальным кольцом. Важным достижением здесь является переход к кольцам с делителями нуля.

Две работы Солацци посвящены описанию автоморфизмов конгруэнц-подгрупп классических групп. В основе доказательств лежит метод О'Миры.

Исключительный случай двумерных линейных групп, к которым обычные методы, как правило, неприменимы, детально исследован в мемуаре Кона, из которого в настоящем сборнике переведены два центральных параграфа об изоморфизмах и гомоморфизмах (с изложением всех необходимых сведений из предыдущих параграфов). Основным орудием этого исследования является задание линейной группы определяющими соотношениями. Отметим, что недавно в двумерном случае был достигнут новый существенный прогресс.

Краткий обзор самых последних достижений в теории автоморфизмов классических групп и библиография приведены в конце книги.

Ю. И. Мерзляков

Новосибирск, Академгородок,
5 августа 1975 г.

АВТОМОРФИЗМЫ УНИТАРНЫХ ГРУПП НАД БЕСКОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ [1])

А. Джонсон

В работе [5] я ввел новый метод, с помощью которого описал автоморфизмы унитарных групп, как тогда казалось, в последнем оставшемся случае. Имелось в виду, что Шпигель уже получил описание автоморфизмов, когда индекс Витта больше 1, а размерность пространства больше 5. Однако в его рассуждениях обнаружился пробел. В самом деле, чтобы доказать сохранение трансвекций при автоморфизмах, Шпигель пользуется тем, что автоморфизмы сохраняют композиционные ряды централизаторов изометрий (см. [10], стр. 45). К сожалению, рассмотренный им ряд не является композиционным, так как группа $\boldsymbol{U}_s(K, \hat{f})$ не проста. Больше того, по образцу одного примера из [3] можно построить 2-мерные унитарные группы $\boldsymbol{U}_2^+(K, \hat{f})$ над полем формальных степенных рядов с коэффициентами в $\mathbb{F}_4$, имеющие бесконечно много нормальных подгрупп.

Цель настоящей работы двоякая: 1) завершить решение вопроса об автоморфизмах унитарных групп, по крайней мере для $n \geqslant 3$; 2) показать, что метод, введенный в [5], пригоден для описания автоморфизмов унитарных групп над произвольными бесконечными полями независимо от характеристики.

Результат в точной формулировке таков.

Пусть V — невырожденное n-мерное эрмитово пространство над бесконечным полем, $n \geqslant 3$. Пусть Δ обозначает $\boldsymbol{U}_n^+(V)$ или $\boldsymbol{U}_n(V)$, а Λ — некоторый автоморфизм группы Δ. Тогда

$$\Lambda(\sigma) = \chi(\sigma)\, g\sigma g^{-1}, \quad \sigma \in \Delta,$$

при подходящем гомоморфизме χ группы Δ в ее центр и полулинейном изоморфизме g пространства V на V, сохраняющем ортогональность.

---

[1]) A. A. Johnson, The automorphisms of the unitary groups over infinite fields, *Amer. J. Math.*, 95, № 1 (1973), 87—107.

§ 1. Основные понятия и обозначения [1])

В дальнейшем E обозначает бесконечное поле с нетривиальной инволюцией *, F — его подполе, неподвижное относительно *. Таким образом, E/F — квадратичное расширение Галуа. На протяжении всей статьи используются следующие обозначения, связанные с этим расширением:

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — элементы из E;

$a, b, c, \ldots$ — элементы из F;

$E^\bullet, F^\bullet$ — множества ненулевых элементов из E и F;

$T(\alpha) = \alpha + \alpha^*$; $N(\alpha) = \alpha\alpha^*$, $\alpha \in E$;

$\mathcal{U} = \{\alpha \in E \mid N(\alpha) = 1\}$.

Если ω — некоторый элемент из E, не лежащий в F, то отображение $a \to \dfrac{a+\omega}{a+\omega^*}$ поля F в $\mathcal{U}$ инъективно. Значит, $\mathcal{U}$ бесконечно. Для ω из E и a из F имеем $T(a\omega) = aT(\omega)$. Поэтому существует элемент $\omega \in E$, такой, что $T(\omega) = 1$.

Через V обозначается регулярное конечномерное эрмитово пространство, т. е. конечномерное векторное пространство над E с невырожденной эрмитовой формой q: $V \times V \to E$. С эрмитовым пространством будут связываться следующие обозначения:

$Q(x) = q(x, x)$ для любого $x \in V$;
$U \perp W$, если U и W — подпространства пространства V, причем

$$U \cap W = \{0\} \quad \text{и} \quad q(U, W) = \{0\};$$

$U^\perp = \{x \in V \mid q(x, U) = \{0\}\}$;
$\operatorname{rad} U = U \cap U^\perp$;
$n = \dim V$;
ν — индекс Витта пространства V;
$U \subset W$, если U — собственное подмножество в W;
dU — дискриминант U;
$U \cong \langle a_1 \rangle \perp \ldots \perp \langle a_k \rangle$ означает, что U имеет базу $x_1, \ldots, x_k$, для которой $Q(x_i) = a_i$ и $q(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$;

$U \cong (\alpha_{ij})$ означает, что U имеет базу $x_1, \ldots, x_k$, такую, что $q(x_i, x_j) = \alpha_{ij}$ для всех i, j;

1_U — тождественное отображение пространства U на себя.

---

[1]) Основные результаты, касающиеся теории эрмитовых форм над полями, можно найти в [2].

Если W — невырожденное подпространство пространства V, то

$\boldsymbol{U}(W)$ — унитарная группа пространства W;

$\boldsymbol{U}^{+}(W)$ — группа вращений;

$Z(W)$ — центр группы $\boldsymbol{U}(W)$.

Ненулевой вектор x из V называется *изотропным*, если $Q(x)=0$. Если $Q(x)\neq 0$, то будем говорить, что x *анизотропен*. Эрмитово пространство, содержащее изотропный вектор, называется *изотропным пространством*. В противном случае оно называется *анизотропным*. Пространство, в котором каждый ненулевой вектор изотропен, назовем *вполне изотропным*. *Индекс Витта* ν есть размерность максимального вполне изотропного подпространства из V. По определению *гиперболическая плоскость* H — это регулярная изотропная плоскость, и можно записать $H\cong\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Плоскость H тогда и только тогда является гиперболической, когда $dH=-1$.

(1.1) *Пусть* $Ex+Ey\cong\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. *Тогда для любого* $a\in F$ *существует бесконечно много прямых* $Ew\subseteq Ex+Ey$, *удовлетворяющих условию* $Q(w)=a$.

Доказательство. Если $a\neq 0$, то возьмем элемент $\omega\in E$, такой, что $T(\omega)=1$. Пусть $a=bc$, b, $c\in F$. Тогда $Q(b\omega x+cy)=T(bc\omega)=a$. Легко видеть, что

$$b_1\omega x+c_1y\in E(b_2\omega x+c_2y)$$

тогда и только тогда, когда $b_1=\pm b_2$. Значит, существует бесконечно много прямых $E(b\omega x+cy)$.

Если $a=0$, то возьмем элемент $\omega\in E^{\bullet}$, такой, что $T(\omega)=0$; тогда $Q(b\omega x+y)=0$ для всех b из F. Утверждение (1.1) теперь очевидно.

Как хорошо известно, $\det\sigma\in\mathcal{U}$ для всех $\sigma\in\boldsymbol{U}_n(V)$. Если $V=U\perp W$ — ортогональное разложение пространства V и подпространства U и W инвариантны относительно изометрии ρ из $\boldsymbol{U}_n(V)$, то будем писать $\rho=\rho_1\perp\rho_2$, где $\rho_1=\rho|_U$, $\rho_2=\rho|_W$. Если ε, $\eta\in\mathcal{U}$, то через $\rho=\varepsilon\perp\eta$ обозначается такая изометрия ρ, что $\rho(x)=\varepsilon x$ для всех x из U и $\rho(x)=\eta x$ для всех x из W. Символ $\rho=1$ обозначает тождественное отображение пространства V. Допустим, что $\dim W=r\neq 0$, n. Возьмем элемент $\varepsilon\in\mathcal{U}$, удовлетворяющий условию $\varepsilon^n\neq 1$. Тогда $\rho=(\varepsilon^*)^r\perp(\varepsilon)^{n-r}$ принадлежит $\boldsymbol{U}_n^{+}(V)$, но не лежит

в $Z_n(V)$. Таким образом, для любого нетривиального разложения $V=U\perp W$ можно найти ε, η из $\mathcal{U}$, для которых $\rho=\varepsilon\perp\eta\in \boldsymbol{U}_n^+(V)-Z_n(V)$.

(1.2) *Предположим, что* $V=U\perp W$ — *нетривиальное разложение пространства* V. *Тогда для любой прямой* L *из* V *существует изометрия* σ *из* Δ, *такая, что* $\sigma L\nsubseteq U\cup W$.

Доказательство. Можно считать, что $L=Ex\subseteq U$. Пусть y — анизотропный вектор из W.

Если вектор x анизотропен, то $Ex\perp Ey\cong\langle a\rangle\perp\langle b\rangle$ для некоторых a, b из $F^{\bullet}$. В силу утверждения (1.1), поскольку пространство вида $\langle a\rangle\perp\langle -a\rangle$ является гиперболической плоскостью, можно найти элементы $\xi_1\neq 0$, $\xi_2\neq 0$ из E, такие, что $N(\xi_1)a-N(\xi_2)a=b$. Тогда $a=N(1/\xi_1)b+N(\xi_2/\xi_1)a$ и, следовательно, существуют $\alpha,\beta\in E^{\bullet}$, такие, что $Q(\alpha x+\beta y)=a$. Положим $\sigma x=\alpha x+\beta y$ и продолжим σ до некоторой изометрии из $\boldsymbol{U}_n^+(V)\subseteq\Delta$ по теореме Витта.

При изотропном векторе x пространство U универсально, т. е. $Q(U)=F$. Возьмем $z\in U$, такой, что $Q(z)=-Q(y)$. Пусть $\sigma x=z+y$ и продолжим σ до преобразования из $\boldsymbol{U}_n^+(V)\subseteq\Delta$, используя теорему Витта. Утверждение (1.2) доказано.

Пусть σ — элемент из $\boldsymbol{U}_n(V)$. Для любого $\alpha\in E$ положим $P_\alpha=\ker(\sigma-\alpha\cdot 1)$. Ясно, что $P_\alpha=\{0\}$ для всех, кроме конечного числа, элементов α и $P_\alpha\cap P_\beta=\{0\}$, если $\alpha\neq\beta$. Назовем $P=\bigoplus_{\alpha\in E}P_\alpha$ *собственным пространством* изометрии σ, а $R=P^{\perp}$ — ее *вычетным пространством.* Заметим, что если $q(P_\alpha, P_\beta)\neq 0$, то $\alpha=(\beta^*)^{-1}$. Значит,

$$P=P_{\alpha_1}\perp\ldots\perp P_{\alpha_l}\perp\left(P_{\beta_1^*}+P_{\beta_1^{-1}}\right)\perp\ldots\perp\left(P_{\beta_k^*}+P_{\beta_k^{-1}}\right),$$

где $\alpha_i\in\mathcal{U}$, $\beta_i\in E^{\bullet}-\mathcal{U}$. Не исключено, что некоторые $P_{\beta_i^{-1}}$ могут быть нулевыми. Мы называем изометрию σ *регулярной* или *вырожденной*, если P регулярно или вырождено соответственно. Пусть P регулярно и все α, для которых $P_\alpha\neq\{0\}$, лежат в $\mathcal{U}$, тогда $P=P_{\alpha_1}\perp\ldots\perp P_{\alpha_l}$, где $\alpha_i\in\mathcal{U}$, $1\leqslant i\leqslant l$. Если ρ — изометрия, перестановочная с σ, то $\rho\colon P_{\alpha_i}\to P_{\alpha_i}$, $\rho\colon P_{\beta_j^*}\to P_{\beta_j^*}$ и $\rho\colon P_{\beta_j^{-1}}\to P_{\beta_j^{-1}}$ для $1\leqslant i\leqslant l$, $1\leqslant j\leqslant k$. В частности, $\rho\colon P\to P$ и $\rho\colon R\to R$.

Простейшими типами изометрий являются трансвекции и квазисимметрии. *Трансвекция* — это изометрия, оставляющая

на месте каждую точку некоторой вырожденной гиперплоскости U из V. Она имеет вид $\tau_x^\alpha(z) = z + \alpha q(z, x)x$ для некоторого фиксированного $\alpha \in E$, причем $T(\alpha) = 0$, $Ex = U^\perp \subseteq U$. Очевидно, $\tau_x^\alpha = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$. Заметим, что вектор x изотропен. *Квазисимметрией* называется изометрия, оставляющая на месте каждую точку некоторой регулярной гиперплоскости U из V. Она имеет вид $\tau_x^\varepsilon(z) = = z + \frac{(\varepsilon - 1)\, q(z, x)}{Q(x)} x$ для некоторого фиксированного $\varepsilon \in \mathcal{U}$, причем $Ex = U^\perp$. На этот раз вектор x анизотропен и $V = = Ex \perp U$. Здесь $\tau_x^\varepsilon = 1$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon = 1$. Для неединичной трансвекции $P = U$, $R = Ex$, а для квазисимметрии $P = V$, $R = \{0\}$. Легко видеть, что если τ_x^α — трансвекция (квазисимметрия) относительно прямой Ex, а ρ — некоторая изометрия, то $\rho\tau_x^\alpha\rho^{-1} = \tau_{\rho x}^\alpha$ — снова трансвекция (квазисимметрия), но относительно прямой $E\rho x$. Простые вычисления показывают, что для трансвекций и квазисимметрий $\tau_x^\alpha\tau_y^\beta = \tau_y^\beta\tau_x^\alpha$ тогда и только тогда, когда $x \in Ey$ или $q(x, y) = 0$. Аналогично, если $\alpha \neq 0$, то $\tau_{\rho x}^\alpha = \tau_x^\alpha$ (т. е. ρ перестановочно с τ_x^α) тогда и только тогда, когда $\rho x = \eta x$ для некоторого $\eta \in \mathcal{U}$.

Изометрия, принадлежащая центру $Z_n(V)$, оставляет на месте все анизотропные прямые. Верно и обратное утверждение.

В оставшейся части работы Δ будет обозначать произвольную подгруппу из $\boldsymbol{U}_n(V)$, содержащую $\boldsymbol{U}_n^+(V)$. Если $V = = Ex \perp W$ — нетривиальное разложение V, то возьмем $\tau = = \varepsilon \perp \eta \in \Delta - Z_n(V)$. Тогда любая изометрия из $Z(\Delta)$ перестановочна с τ и, следовательно, оставляет прямую Ex на месте. Поскольку Ex — произвольная анизотропная прямая, то $Z(\Delta) = Z_n(V) \cap \Delta$.

Пусть X — подмножество из Δ. Через $C(X)$ обозначим централизатор X в Δ, а через $N(X)$ — нормализатор X в Δ, т. е. $N(X) = \{\rho \in \Delta \mid \rho X \rho^{-1} = X\}$. Пусть Λ — автоморфизм группы Δ. Очевидно, $\Lambda C(X) = C(\Lambda X)$ и $\Lambda N(X) = N(\Lambda X)$ для любого подмножества X из Δ.

§ 2. Свойства квазисимметрий и трансвекций

Пусть U — некоторое подпространство из V. Для любого ненулевого элемента α из E линейное преобразование r_α на U, определенное правилом $r_\alpha(u) = \alpha u$ для всех u из U, называется *растяжением* на U. Пусть $R(U)$ — группа всех растяжений на U.

Для ненулевого вектора $x \in V$ положим $S_x = \{\sigma \in \Delta \mid \sigma|_{Ex^\perp} \in R(Ex^\perp)\}$ и назовем S_x множеством всех изометрий, *ассоциированных* с x. С этого момента мы предполагаем, что $n = \dim V \geqslant 3$. В настоящем параграфе изучаются некоторые свойства множества S_x. Нас интересуют два случая, а именно когда вектор x анизотропен и когда он изотропен. Сначала найдем теоретико-групповые свойства, общие для того и другого случая, а затем — характерные для каждого.

(2.1) *Если x анизотропен, то*

$$S_x = \{\eta\tau_x^\varepsilon \in \Delta \mid \eta, \varepsilon \in \mathcal{U}\} \supset Z(\Delta).$$

Если x изотропен, то

$$S_x = \{\eta\tau_x^\alpha \in \Delta \mid \eta \in \mathcal{U}, T(\alpha) = 0\} \supset Z(\Delta).$$

Доказательство. Если $\rho \in S_x$, можно найти $\eta \in \mathcal{U}$, такое, что $\rho y = \eta y$ для всех $y \in Ex^\perp$. Значит, $\eta^*\rho$ оставляет точки гиперплоскости $Ex^\perp$ на месте. Если вектор x анизотропен, то $Ex^\perp$ регулярна и $\eta^*\rho = \tau_x^\varepsilon$ — квазисимметрия. В этом случае $\rho = \eta\tau_x^\varepsilon$ для некоторых $\eta, \varepsilon \in \mathcal{U}$. Если x изотропен, то $Ex^\perp$ — вырожденная гиперплоскость, причем $\operatorname{rad} Ex^\perp = Ex$, поэтому $\eta^*\rho = \tau_x^\alpha$ — трансвекция. Таким образом, $\rho = \eta\tau_x^\alpha$ для некоторого $\eta \in \mathcal{U}$ и некоторого α, удовлетворяющего условию $T(\alpha) = 0$.

Осталось показать, что $S_x \supset Z(\Delta)$ в каждом случае. При изотропном x трансвекция τ_x^α с $\alpha \neq 0$ имеет определитель 1 и, значит, лежит в $\boldsymbol{U}_n^+(V) \subseteq \Delta$. Таким образом, $\tau_x^\alpha \in S_x - Z(\Delta)$.

Предположим теперь, что x анизотропен. Мы можем отыскать подходящие $\varepsilon, \eta \in \mathcal{U}$, такие, что $\varepsilon \neq \eta$ и $\rho = \varepsilon \perp \eta \in \boldsymbol{U}_n^+(V) \subseteq \Delta$ для разложения $V = Ex \perp W$. Тогда $\eta^*\rho = \eta^*\varepsilon \perp 1 = \tau_x^{\eta^*\varepsilon}$. Следовательно, $\rho = \eta\tau_x^{\eta^*\varepsilon} \in S_x - Z(\Delta)$, что и требовалось доказать.

Теперь ясно, что $S_x = S_y$ для ненулевых векторов x и y из V тогда и только тогда, когда $y \in Ex$.

(2.2) $C(S_x) = \{\rho \in \Delta \mid \rho x = \xi x$ *для некоторого* $\xi \in \mathcal{U}\}$.

Доказательство. Пусть $\rho \in \Delta$ и $\rho x = \xi x$. Тогда $\rho(\eta\tau_x^\alpha)\rho^{-1} = \eta\tau_{\xi x}^\alpha = \eta\tau_x^\alpha$, где τ_x^α — трансвекция или квазисимметрия в зависимости от того, является x изотропным или анизотропным вектором.

Теперь возьмем $\eta\tau_x^\alpha \in S_x - Z(\Delta)$. Если $\rho \in C(S_x)$, то $\rho(\eta\tau_x^\alpha)\rho^{-1} = \eta\tau_{\rho x}^\alpha = \eta\tau_x^\alpha$, так что $\tau_{\rho x}^\alpha = \tau_x^\alpha$. Значит, $\rho x = \xi x$ для некоторого ξ из $\mathcal{U}$, и (2.2) доказано.

Очевидно, S_x — абелева подгруппа группы Δ. Отсюда следует, что $S_x \subseteq CC(S_x) \subseteq C(S_x)$.

(2.3) $$S_x = CC(S_x).$$

Доказательство. Предположим сначала, что вектор x анизотропен. Тогда

$$\boldsymbol{U}(Ex) \perp \boldsymbol{U}(W) \supseteq C(S_x) \supseteq \{(\det\tau)^* \perp \tau \mid \tau \in \boldsymbol{U}(W)\},$$

где $W = Ex^\perp$. Если ρ — изометрия, принадлежащая $CC(S_x)$, то она перестановочна со всеми изометриями вида $(\det\tau)^* \perp \tau$, где τ пробегает $\boldsymbol{U}(W)$. Значит, Ex и W инвариантны относительно ρ. Поскольку $\rho|_W$ коммутирует со всеми $\tau \in \boldsymbol{U}(W)$, то $\rho|_W \in Z(W)$ и, согласно определению, $\rho \in S_x$.

Пусть вектор x изотропен. Можно считать, что $V = (Ex + Ey) \perp W$, где $Ex \perp W = Ex^\perp$ и $Ex + Ey \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (Здесь Ey и W не определяются единственным образом.) Пусть $\rho \in CC(S_x) \subseteq C(S_x)$. Тогда $\rho x = \varepsilon x$ для некоторого $\varepsilon \in U$ и $\rho(Ex \perp W) = Ex \perp W$.

Возьмем $\varepsilon, \eta \in \mathcal{U}$, удовлетворяющие условиям $\varepsilon \neq \eta$ и $\tau = \varepsilon \perp \eta \in \boldsymbol{U}_n^+(V) \subseteq \Delta$ для разложения $V = (Ey + Ex) \perp W$. Конечно, $\tau \in C(S_x)$. Поскольку ρ перестановочна с τ, то W и $Ey + Ex$ инвариантны относительно ρ. Все изометрии вида $1 \perp \tau$, где $\tau \in \boldsymbol{U}^+(W)$, лежат в $C(S_x)$, и ρ перестановочна с ними, поэтому $\rho|_W \in Z(W)$.

Теперь $\rho x = \varepsilon x$ и $\rho w = \eta w$ для всех $w \in W$ и некоторых ε, η из $\mathcal{U}$. Покажем, что $\varepsilon = \eta$. Пусть $w_1, w_2, \ldots, w_{n-2}$ — база W. Тогда $x + w_1, \ldots, w_{n-2}$ — база другого регулярного подпространства W' из $Ex^\perp$. Пусть $V = (Ey' + Ex) \perp W'$ и $(Ey' + Ex) \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Предыдущие рассуждения показывают, что $\rho x = \varepsilon x$ и $\rho(w') = \xi w'$ для всех $w' \in W'$, где $\xi \in \mathcal{U}$. Тогда $\rho(x + w_1) = \varepsilon x + \eta w_1 = \xi(x + w_1)$, откуда $\eta = \varepsilon = \xi$.

Итак, $\rho|_{Ex^\perp} \in R(Ex^\perp)$ и, значит, $\rho \in S_x$, что и требовалось доказать.

(2.4) *Если* $C(\tau) \supset C(S_x)$, *то* $\tau \in Z(\Delta)$. *Значит, если* $\tau \in S_x - Z(\Delta)$, *то* $C(\tau) = C(S_x)$.

Доказательство. Из включения $C(S_x) \subset C(\tau)$ следует перестановочность всех элементов из $C(S_x)$ с τ, т. е. $\tau \in CC(S_x) = S_x$. Если τ не лежит в $Z(\Delta)$, то τ имеет вид $\tau = \eta\tau_x^\alpha$, где τ_x^α — нетривиальная трансвекция или квазисимметрия. Как и в доказательстве утверждения (2.2), любой

элемент ρ из $C(\tau)$ должен удовлетворять равенству $\rho x = \xi x$ для некоторого $\xi \in \mathcal{U}$. Поэтому $\rho \in C(S_x)$, что противоречит строгости включения $C(S_x) \subset C(\tau)$. Итак, $\tau \in Z(\Delta)$, что и требовалось доказать.

На этом мы закончим перечисление общих свойств множеств S_x при изотропном и анизотропном x и перейдем к специфическим свойствам для каждого случая.

(2.5) *Если вектор x анизотропен, то $N(S_x) = C(S_x)$.*

Доказательство. Ясно, что $C(S_x) \subseteq N(S_x)$. Пусть $\rho \in N(S_x)$, $\eta\tau_x^\varepsilon \in S_x - Z(\Delta)$. Тогда $\rho(\eta\tau_x^\varepsilon)\rho^{-1} = \eta\tau_{\rho x}^\varepsilon \in S_x$. Значит, $\rho x \in Ex$, и поскольку x анизотропен, то $\rho x = \xi x$ для некоторого $\xi \in \mathcal{U}$. Таким образом, $\rho \in C(S_x)$, и (2.5) доказано.

(2.6) *Если вектор x изотропен, то $N(S_x) \supset C(S_x)$.*

Доказательство. Пусть $V = (Ey + Ex) \perp W$, где $Ey + Ex \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $Ex^\perp = Ex \perp W$. Пусть $W = Ez \perp W'$ для некоторого анизотропного $z \in W$. Возьмем $\gamma \in E^\bullet - \mathcal{U}$ и определим $\rho y = \gamma^* y$, $\rho x = \gamma^{-1} x$, $\rho z = (\gamma/\gamma^*) z$, $\rho|_{W'} = 1_{W'}$. Тогда $\rho \in U_n^+(V) \subseteq \Delta$ и $\rho \notin C(S_x)$, так как $\gamma^{-1} \notin \mathcal{U}$.

Пусть $\eta\tau_x^\alpha$ — произвольный элемент из S_x. Тогда $\rho(\eta\tau_x^\alpha)\rho^{-1} = \eta\tau_{\rho x}^\alpha = \eta\tau_{\gamma^{-1}x}^\alpha = \eta\tau_x^{N(\gamma^{-1})\alpha}$ принадлежит S_x. Таким образом, $\rho \in N(S_x) - C(S_x)$, и (2.6) доказано.

Очевидно, что из $q(x, y) = 0$ следует включение $S_x \subseteq C(S_y)$. Если $S_x \subseteq C(S_y)$ и $S_x \neq S_y$, то $q(x, y) = 0$. Действительно, из соотношения $S_x \neq S_y$ следует, что $x \notin Ey$, а тогда включение $S_x \subseteq C(S_y)$ влечет за собой $q(x, y) = 0$.

§ 3. S_x в случае анизотропного вектора x

В этом параграфе мы предположим анизотропность вектора $x \in V$ и покажем, что $\Lambda(S_x) = S_y$ для некоторого анизотропного вектора $y \in V$.

(3.1) Теорема. *Пусть $\tau \in \Delta$ таково, что $\rho\tau\rho^{-1} \in C(\tau)$ для всех $\rho \in C(S_x)$. Тогда $\tau \in S_x$.*

Доказательство. Имеем $V = Ex \perp W$, где $W = Ex^\perp$. Ясно, что

$$\boldsymbol{U}(Ex) \perp \boldsymbol{U}(W) \supseteq C(S_x) \supseteq \{(\det\rho)^* \perp \rho \mid \rho \in \boldsymbol{U}(W)\}.$$

Пусть $\tau x = \alpha x + w$ для некоторых $\alpha \in E$, $w \in W$. Покажем сначала, что $w = 0$.

Возьмем $\bar\rho \in U(W)$, и пусть $\varepsilon^* = \det\bar\rho$. Тогда $\rho = \varepsilon \perp \bar\rho \in C(S_x)$ и должно быть $\tau\rho\tau\rho^{-1} = \rho\tau\rho^{-1}\tau$ для всех таких ρ. Применим обе стороны этого равенства к вектору x и сравним результаты:

$$\tau\rho\tau\rho^{-1}(x) = \varepsilon^*\tau\rho(\alpha x + w) = \tau(\alpha x + \varepsilon^*\rho w) = \alpha^2 x + \alpha w + \varepsilon^*\tau\rho w,$$

$$\rho\tau\rho^{-1}\tau(x) = \rho\tau(\alpha\varepsilon^* x + \rho^{-1}w) = \rho(\alpha^2\varepsilon^* x + \alpha\varepsilon^* w + \tau\rho^{-1}w) = \\ = \alpha^2 x + \alpha\varepsilon^*\rho w + \rho\tau\rho^{-1}w.$$

Из сравнения видно, что

$$(\det\bar\rho)(\tau\rho w - \alpha\rho w) = \rho\tau\rho^{-1}w - \alpha w = \rho(\tau\rho^{-1}w - \alpha\rho^{-1}w). \quad (1)$$

Если положить $\bar\rho = \eta \cdot 1_W$, где $\eta \in \mathcal{U}$, $\eta^n \neq \pm 1$, то $\rho = (\eta^*)^{n-1} \perp \eta$, так как $\det\bar\rho = \eta^{n-1}$. Используя равенство (1), получаем

$$\eta^{n-1}(\eta\tau w - \alpha\eta w) = \eta^n(\tau w - \alpha w) = \\ = \rho(\eta^*\tau w - \alpha\eta^* w) = \eta^*\rho(\tau w - \alpha w),$$

так что

$$\eta^{n+1}(\tau w - \alpha w) = \rho(\tau w - \alpha w).$$

По предположению $\eta^n \neq 1$, значит, $(\eta^*)^{n-1} \neq \eta$. Поэтому, если прямая Ez инвариантна относительно ρ, то $Ez \subseteq Ex \cup W$. При $\tau w - \alpha w \in Ex$ справедливо равенство

$$\eta^{n+1}(\tau w - \alpha w) = \rho(\tau w - \alpha w) = (\eta^*)^{n-1}(\tau w - \alpha w),$$

откуда $\eta^{2n}(\tau w - \alpha w) = \tau w - \alpha w$. Но $\eta^n \neq \pm 1$, значит, $\tau w - \alpha w = 0$. Если $\tau w - \alpha w \in W$, то

$$\eta^{n+1}(\tau w - \alpha w) = \rho(\tau w - \alpha w) = \eta(\tau w - \alpha w)$$

и, поскольку $\eta^n \neq 1$, то снова $\tau w - \alpha w = 0$. Значит, $\tau w = \alpha w$.

Пусть вектор w анизотропен. Тогда $Q(w) = Q(\tau w) = N(\alpha)Q(w)$ и $N(\alpha) = 1$. Следовательно, $Q(\tau x) = Q(\alpha x + w) = Q(x) + Q(w) \neq Q(x)$, что невозможно. Таким образом, $Q(w) = 0$ и $Q(\tau x) = N(\alpha)Q(x) + Q(w)$, откуда $N(\alpha) = 1$. Пусть $w \neq 0$ и $V = Ex \perp (Ew + Ez) \perp W'$, где $Ew + Ez \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Тогда $\tau(Ex \perp Ew) = Ex \perp Ew$ и $(Ex \perp Ew)^\perp = Ew \perp W'$ инвариантно относительно τ. Если мы убедимся, что $\tau z \in W$, то W и, следовательно, $W^\perp = Ex$ окажутся инвариантными относительно τ, что противоречит предположению $w \neq 0$.

Возьмем $\eta \in \mathcal{U}$, такой, что $\eta^{2n} \neq \pm 1$. Определим ρ по правилу $\rho x = \eta^{n-1}x$, $\rho w' = \eta^* w'$ для всех $w' \in W'$, $\rho w = -\eta^* z$ и $\rho z = \eta^* w$. Тогда $\det \rho = 1$ и $\rho \in C(S_x)$. Обращаясь снова к равенству (1), получим

$$(\eta^*)^{n-1}(\tau\rho w - \alpha\rho w) = \rho(\tau\rho^{-1}w - \alpha\rho^{-1}w),$$

или

$$-(\eta^*)^n(\tau z - \alpha z) = \eta\rho(\tau z - \alpha z).$$

Пусть $\tau z - \alpha z = \beta x + u$ для некоторых $\beta \in E$, $u \in W$. Тогда

$$-(\eta^*)^n(\beta x + u) = \eta(\eta^{n-1}\beta x + \rho u).$$

Значит,

$$\beta(\eta^n + (\eta^*)^n)x = -(\eta\rho u + (\eta^*)^n u) \in W.$$

Если $\eta^* = -(\eta^*)^n$, то $\eta^{2n} = -1$, что противоречит выбору η. Отсюда $\beta = 0$ и $\tau z = \alpha z + u \in W$.

Итак, мы показали, что $\tau x = \alpha x$, если $\rho\tau\rho^{-1} \in C(\tau)$ для всех $\rho \in C(S_x)$. Поэтому τ имеет вид $\tau = \alpha \perp \bar{\tau}$, где $\bar{\tau} \in \boldsymbol{U}(W)$. Так как

$$C(S_x) \supseteq \{(\det \rho)^* \perp \rho \mid \rho \in \boldsymbol{U}(W)\},$$

то $\rho\bar{\tau}\rho^{-1} \in C(\bar{\tau}) = \{\sigma \in \boldsymbol{U}(W) \mid \sigma\bar{\tau} = \bar{\tau}\sigma\}$ для всех ρ из $\boldsymbol{U}(W)$. Значит, $\bar{\tau}$ удовлетворяет предположениям теоремы при $\Delta = \boldsymbol{U}(W)$ и любом анизотропном векторе $y \in W$, т. е. если y — анизотропный вектор из W, S_y и $C(S_y)$ взяты относительно $\Delta = \boldsymbol{U}(W)$, то $\rho\bar{\tau}\rho^{-1} \in C(\bar{\tau})$ для всех $\rho \in C(S_y)$. (Заметим, что в доказательстве соотношения $\tau x = \alpha x$ не делается никаких ограничений на $n = \dim V$, исключается только случай $n = 0$.) Поэтому $\bar{\tau}$ оставляет на месте все анизотропные прямые и, следовательно, принадлежит $Z(W)$.

Итак, τ имеет вид $\tau = \alpha 1_{Ex} \perp \eta 1_W$, $\alpha, \eta \in \mathcal{U}$, откуда $\tau = \eta\tau_x^{\alpha\eta^*} \in S_x$, что и требовалось доказать.

(3.2) Следствие. *Каждая абелева нормальная подгруппа из Δ содержится в $Z(\Delta)$.*

Доказательство. Предположим, что G нормальна в Δ и абелева. Возьмем $\tau \in G$. Тогда $\rho\tau\rho^{-1} \in G$ для всех $\rho \in \Delta$ и, значит, $\rho\tau\rho^{-1} \in C(\tau)$ для всех $\rho \in \Delta$. По теореме 3.1 преобразование τ должно оставлять все анизотропные прямые на месте, откуда $\tau \in Z(\Delta)$.

Все изометрии из S_x регулярны. Покажем, что их образы при Λ также регулярны. Очевидно, $\Lambda(Z(\Delta)) = Z(\Delta)$. Возьмем $\sigma \in S_x - Z(\Delta)$ и покажем, что $\Lambda\sigma$ регулярна.

(3.3) *Если* $\sigma \in S_x - Z(\Delta)$, *то* $\sigma' = \Lambda\sigma$ — *регулярная изометрия из* Δ.

Доказательство. Пусть P' и R' — собственное и вычетное пространства для $\sigma' = \Lambda\sigma$. Допустим, что P' вырождено. Возьмем ненулевой вектор $y \in \operatorname{rad} P'$ и трансвекцию τ_y^α, $\alpha \neq 0$. Конечно, $\tau_y^\alpha \in \Delta$, и если $\rho \in C(\sigma')$, то $\rho(P') = P'$. Значит, $\rho\tau_y^\alpha\rho^{-1} = \tau_{\rho y}^\alpha \in C(\tau_y^\alpha)$, так как $q(y, \rho y) = 0$. Поэтому

$$\Lambda^{-1}\rho\Lambda^{-1}\tau_y^\alpha\Lambda^{-1}\rho^{-1} \in C(\Lambda^{-1}\tau_y^\alpha)$$

для всех $\rho \in C(\sigma')$. Но когда ρ пробегает $C(\sigma')$, его прообраз $\Lambda^{-1}\rho$ пробегает $C(\Lambda^{-1}\sigma') = C(\sigma) = C(S_x)$. Таким образом, $\Lambda^{-1}\tau_y^\alpha$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1 и, значит, $\Lambda^{-1}\tau_y^\alpha \in S_x$. Так как $\tau_y^\alpha \notin Z(\Delta)$, то $\Lambda^{-1}\tau_y^\alpha \in S_x - Z(\Delta)$, откуда $C(\Lambda^{-1}\tau_y^\alpha) = C(\sigma) = C(S_x)$. Поэтому $C(\tau_y^\alpha) = C(\sigma') = C(S_y)$. Далее,

$$\Lambda S_x = \Lambda CC(\Lambda^{-1}\tau_y^\alpha) = CC(\tau_y^\alpha) = S_y.$$

Значит, $\Lambda(N(S_x)) = N(\Lambda S_x) = N(S_y)$. Но $N(S_x) = C(S_x)$ и $N(S_y) \supset C(S_y)$, откуда $C(\sigma') = \Lambda C(\sigma) = \Lambda N(S_x) = N(S_y) \supset C(\sigma')$, противоречие. Значит, изометрия $\Lambda\sigma = \sigma'$ должна быть регулярной, что и требовалось показать.

Итак, для любого $\sigma \in S_x - Z(\Delta)$ преобразование $\sigma' = \Lambda\sigma$ регулярно, поэтому можно записать $V = P' \perp R'$, где

$$P' = P_{\varepsilon_1} \perp \ldots \perp P_{\varepsilon_k} \perp \left(P_{\alpha_1^*} + P_{\alpha_1^{-1}}\right) \perp \ldots \perp \left(P_{\alpha_l^*} + P_{\alpha_l^{-1}}\right).$$

Предположим временно, что $P' \neq \{0\}$. Тогда

(3.4) $$V = P' = P_{\varepsilon_1} \perp P_{\varepsilon_2}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что $R' = \{0\}$. Как мы знаем, σ' не оставляет на месте ни одну прямую из R', значит, $\dim R' \geqslant 2$, если $R' \neq \{0\}$. Очевидно, $1_{P'} \perp \boldsymbol{U}^+(R')$ — подгруппа из Δ, содержащая изометрию, не перестановочную с σ', поскольку $\sigma'|_{R'} \notin Z(R')$. При подходящем выборе ξ, $\eta \in \mathcal{U}$, $\xi \neq \eta$, изометрия $\tau = \xi \perp \eta$, согласованная с разложением $V = P' \perp R'$, лежит в Δ и, значит, в $C(\sigma')$. Но $\tau \notin Z(\Delta)$ и $\tau \in CC(\sigma')$, так как P' и R' инвариантны относительно каждой изометрии из $C(\sigma')$. Поэтому $C(\tau) \supseteq C(\sigma')$. Однако $C(\tau) \supseteq 1_{P'} \perp \boldsymbol{U}^+(R')$ и $C(\tau) \supset C(\sigma')$. С другой стороны, $C(\Lambda^{-1}\tau) = C(\sigma)$, противоречие.

Используя те же рассуждения и утверждение (1.2), можно показать, что разложение пространства P' содержит не более двух слагаемых. Очевидно, P' не может иметь вид $P' = P_{\varepsilon_1}$, поскольку тогда $\sigma' \in Z(\Delta)$.

Наконец, исключим возможность слагаемого $P_{\alpha^*} + P_{\alpha^{-1}}$ в разложении P'. При доказательстве этого по существу повторяются рассуждения из (3.3).

Элемент α не лежит в $\mathcal{U}$, поэтому P_{α^*} вполне изотропно. Пусть $y \in P_{\alpha^*}$, а τ_y^β — трансвекция, причем $\beta \neq 0$. Любая изометрия ρ из $C(\sigma')$ оставляет на месте P_{α^*} и $P_{\alpha^{-1}}$. Значит, $q(y, \rho y) = 0$ и $\rho\tau_y^\beta\rho^{-1} = \tau_{\rho y}^\beta \in C(\tau_y^\beta)$ для всех $\rho \in C(\sigma')$. Поэтому $\Lambda^{-1}\tau_y^\beta$ удовлетворяет условиям теоремы (3.1) и лежит в $S_x = CC(S_x) = CC(\sigma)$. Отсюда $\tau_y^\beta \in CC(\sigma')$, что противоречит неинвариантности $P_{\alpha^{-1}}$ относительно τ_y^β. В самом деле, если $z \in P_{\alpha^{-1}}$ и $q(z, y) \neq 0$, то

$$\tau_y^\beta(z) = z + \beta q(z, y)\, y \notin P_{\alpha^{-1}}.$$

Утверждение (3.4) доказано.

Теперь можно написать

$$V = P' = P_{\varepsilon_1} \perp P_{\varepsilon_2},$$

где $0 < \dim P_{\varepsilon_1} \leqslant \dim P_{\varepsilon_2}$. Наша задача — показать, что $\dim P_{\varepsilon_1} = 1$. Используем для этого метод, введенный в [5]. Его суть заключается в лемме (4.3) из [5], которая воспроизводится здесь с небольшой модификацией доказательства, позволяющей применять ее в более общей ситуации.

(3.5) Теорема. *Пусть x — анизотропный вектор из V, $\sigma \in S_x - Z(\Delta)$. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ и $\sigma_{k'}$ сопряжены с σ в Δ и не лежат в $C(\sigma)$. Предположим, что*

$$C(\sigma) \supset C(\sigma, \sigma_1) \supset \ldots \supset C(\sigma, \ldots, \sigma_k) \supseteq C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k'}).$$

Тогда $C(\sigma, \ldots, \sigma_k) = C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k'})$.

Доказательство. Пусть $\sigma_{k'} = \rho_{k'}\sigma\rho_{k'}^{-1}$ и $\sigma_i = \rho_i\sigma\rho_i^{-1}$ для $1 \leqslant i \leqslant k$, $\rho_{k'}$ и ρ_i принадлежат Δ. Если $\tau \in C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, то $\tau x \in Ex$ и $\tau(\rho_i x) \in E\rho_i x$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Пусть $\tau x = \xi x$ и $\tau(\rho_i x) = \xi_i\rho_i x$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Так как $\sigma_i \notin C(\sigma)$, то $0 \neq q(x, \rho_i x) = q(\tau x, \tau\rho_i x) = \xi\xi_i^* q(x, \rho_i x)$ и $\xi = \xi_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Положим $W = Ex + E\rho_1 x + \ldots + E\rho_k x$. Так как τ централизует σ, $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, то $\tau|_W \in R(W)$. Обратное тоже верно, поэтому

$$C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \{\tau \in \Delta \mid \tau|_W \in R(W)\}.$$

Покажем теперь, что для $y \in V - W$ существует $\tau \in \in C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ и $\xi \in \mathcal{U}$, такие, что $\tau x = \xi x$, $\tau y \neq \xi y$. Пусть сначала $q(y, W) = 0$. Если $Q(y) \neq 0$, то возьмем $\tau \in S_y - Z(\Delta)$. Пусть $Q(y) = 0$. Тогда $q(y, W^{\perp}) \neq 0$, поскольку $y \notin W = W^{\perp\perp}$. Теперь можно выбрать $z \in W^{\perp}$ так, чтобы $Ey + Ez \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и взять $\tau \in S_z - Z(\Delta)$.

При $q(y, W) \neq 0$ надо действовать несколько тоньше. Пусть W регулярно, тогда $y = w + y'$ для некоторых $w \in W$ и $y' \in W^{\perp}$, $y' \neq 0$. По предыдущему существует $\tau \in C(\sigma, \ldots, \sigma_k)$, удовлетворяющий условиям $\tau x = \xi x$, $\tau y' \neq \xi y'$. Тогда $\tau y = = \tau(w + y') = \xi w + \tau y' \neq \xi y$. Будем считать, что $\operatorname{rad} W \neq \{0\}$. Пусть

$$V = W' \perp (\operatorname{rad} W + U) \perp U',$$

где $\operatorname{rad} W + U$ — гиперболическое пространство, т. е. ортогональная сумма гиперболических плоскостей, $W = W' \perp \operatorname{rad} W$. Если $q(y, \operatorname{rad} W) \neq 0$, то возьмем $z \in \operatorname{rad} W$, такое, что $q(y, z) \neq 0$, и выберем $\tau \in S_z - Z(\Delta)$. Можно считать, что $y = w + u'$, где $w \in W$ и $u' \neq 0$, $u' \in U'$. По предыдущему найдется $\tau \in C(\sigma, \ldots, \sigma_k)$, такое, что $\tau x = \xi x$ и $\tau u' \neq \xi u'$. Тогда $\tau y \neq \xi y$.

Допустим теперь, что существует $\rho_{k'} \in \Delta$, такое, что

$$C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k'}) \subseteq C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k).$$

Если $\rho_k x$ не принадлежит $W' = Ex + E\rho_1 x + \ldots + E\rho_{k-1} x + E\rho_{k'} x$, то существует $\tau \in C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k'})$, такое, что $\tau x = \xi x$ и $\tau(\rho_k x) \neq \xi \rho_k x$. Поэтому τ не лежит в $C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, что противоречит включению

$$C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k'}) \subseteq C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k).$$

Таким образом, $\rho_k x \in W'$. Так как $C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) \subset \subset C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1})$, то $\rho_k x \notin Ex + E\rho_1 x + \ldots + E\rho_{k-1} x$. Следовательно,

$$W = Ex + E\rho_1 x + \ldots + E\rho_{k-1} x + E\rho_k x = W'$$

и $C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k'}) = C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \{\tau \in \Delta \mid \tau|_W \in \in R(W)\}$. Теорема (3.5) доказана.

Для разложения $V = P' = P_{\varepsilon_1} \perp P_{\varepsilon_2}$, где $0 < \dim P_{\varepsilon_1} \leqslant \dim P_{\varepsilon_2}$, предположим дополнительно, что $\dim P_{\varepsilon_1} \geqslant 2$. Покажем, что в этом случае свойство, описанное в теореме (3.5), не имеет места для $\Lambda\sigma = \sigma'$.

Заметим, что если σ' соответствует разложению $V = = P_{\varepsilon_1} \perp P_{\varepsilon_2}$, то некоторая изометрия τ перестановочна с σ'

тогда и только тогда, когда τ оставляет на месте P_{ε_1} и P_{ε_2}. Если $\rho\sigma'\rho^{-1}$ сопряжена с σ', то она соответствует разложению $V = \rho P_{\varepsilon_1} \perp \rho P_{\varepsilon_2}$.

(3.6) *В разложении $V = P_{\varepsilon_1} \perp P_{\varepsilon_2}$ размерность P_{ε_1} равна* 1.

Доказательство. Предположим, что $\dim P_{\varepsilon_1} \geqslant 2$, и пусть

$$P_{\varepsilon_1} = P'_{\varepsilon_1} \perp Ex_1 \perp Ey_1 \quad \text{и} \quad P_{\varepsilon_2} = Ex_2 \perp Ey_2 \perp P'_{\varepsilon_2}.$$

Построим сначала три изометрии ρ_1, ρ_2, ρ_3, принадлежащие $\boldsymbol{U}_n^+(V) \subseteq \Delta$, не удовлетворяющие цепному условию из теоремы (3.5).

Определим ρ_1 по правилу $\rho_1|_{(Ex_1 \perp Ex_2)^\perp} = 1$, $\rho\, x_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$, где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, и продолжим ρ_1 до преобразования из $\boldsymbol{U}_n^+(V)$. Это возможно ввиду (1.2). Аналогично определим ρ_2: $\rho_2|_{(Ey_1 \perp Ey_2)^\perp} = 1$, $\rho_2 y_1 = \gamma y_1 + \delta y_2$, где $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$, и продолжим ρ_2 до элемента из $\boldsymbol{U}_n^+(V)$. Наконец, определим ρ_3: $\rho_3|_{\left(P'_{\varepsilon_1} \perp P'_{\varepsilon_2}\right)} = 1$, $\rho_3 x_1 = \alpha' x_1 + \beta' y_2$, где $\alpha' \neq 0$, $\beta' \neq 0$, продолжим ρ_3 до изометрии из $\boldsymbol{U}_2^+(Ex_1 \perp Ey_2)$, затем положим $\rho_3 y_1 = \gamma' y_1 + \delta' x_2$, где $\gamma' \neq 0$, $\delta' \neq 0$, и продолжим ρ_3 до элемента из $\boldsymbol{U}_2^+\left(Ey_1 \perp Ex_2\right)$. Тогда $\rho_3 \in \boldsymbol{U}_n^+(V)$. Пусть $\sigma_i = \rho_i \sigma' \rho_i^{-1}$, $i = 1, 2, 3$. Конечно, $\sigma_i \notin C(\sigma')$ при $i = 1, 2, 3$, поскольку $\rho_i P_{\varepsilon_1}$ неинвариантно относительно σ'.

Рассмотрим цепь $C(\sigma') \supset C(\sigma', \sigma_1) \supset C(\sigma', \sigma_1, \sigma_2)$. Первое включение строгое, так как $\sigma' \notin C(\sigma', \sigma_1)$. Если взять τ, удовлетворяющее условиям, что $\tau|_{\left(P_{\varepsilon_1} \perp Ex_2\right)} = \varepsilon$ и $\tau|_{\left(Ey_2 \perp P'_{\varepsilon_2}\right)} = \eta$ для подходящих ε, $\eta \in \mathcal{U}$, то $\tau \in \Delta - Z(\Delta)$ и $\tau \in C(\sigma', \sigma_1)$. Заметим, что σ_1 соответствует разложению $V = \rho_1 P_{\varepsilon_1} \perp \rho_1 P_{\varepsilon_2}$, $\tau P_{\varepsilon_1} = P_{\varepsilon_1}$ и $\tau(\rho_1 P_{\varepsilon_1}) = \rho_1 P_{\varepsilon_1}$. Но $\tau \notin C(\sigma', \sigma_1, \sigma_2)$, так как

$$\rho_2 P_{\varepsilon_1} = P'_{\varepsilon_1} \perp Ex_1 \perp E(\gamma y_1 + \delta y_2)$$

и $\tau(\gamma y_1 + \delta y_2) = \gamma\varepsilon y_1 + \delta\eta y_2 = \varepsilon(\gamma y_1 + \delta y_2) + (\eta - \varepsilon)\delta y_2$, где $\eta - \varepsilon \neq 0$, $\delta \neq 0$. Значит, $\tau\rho_2(y_1) \notin \rho_2 P_{\varepsilon_1}$. Итак, все включения в цепочке строгие.

Теперь мы покажем, что $C(\sigma', \sigma_1, \sigma_3) \subset C(\sigma', \sigma_1, \sigma_2)$. Заметим, что $\rho_3 P_{\varepsilon} = P'_{\varepsilon_1} \perp E(\alpha' x_1 + \beta' y_2) \perp E(\gamma' y_1 + \delta' x_2)$. Если $\tau \in C(\sigma', \sigma_1)$, то $\tau(P_{\varepsilon_1}) = P_{\varepsilon_1}$ и $\tau(\rho_1 P_{\varepsilon_1}) = \rho_1 P_{\varepsilon_1} = P'_{\varepsilon_1} \perp Ey_1 \perp$ $\perp E(\alpha x_1 + \beta x_2)$. Значит,

$$\tau(P_{\varepsilon_1} \cap \rho_1 P_{\varepsilon_1}) = P_{\varepsilon_1} \cap \rho_1 P_{\varepsilon_1} = P'_{\varepsilon_1} \perp Ey_1.$$

Таким образом, $\tau x_1 \in Ex_1$ и $\tau(\alpha x_1 + \beta x_2) \in E(\alpha x_1 + \beta x_2)$. Поскольку $q(x_1, \alpha x_1 + \beta x_2) \neq 0$, то $\tau|_{Ex_1 \perp Ex_2} \in Z(Ex_1 \perp Ex_2)$.

Если $\tau \in C(\sigma', \sigma_1, \sigma_2)$, то τ должно отображать $\rho_2 P_{\varepsilon_1}$ в $\rho_2 P_{\varepsilon_1}$. Предыдущие рассуждения показывают, что из включения $\tau \in C(\sigma', \sigma_1, \sigma_2)$ следуют включения $\tau|_{Ex_1 \perp Ex_2} \in Z(Ex_1 \perp Ex_2)$ и $\tau|_{Ey_1 \perp Ey_2} \in Z(Ey_1 \perp Ey_2)$.

Пусть теперь $\tau \in C(\sigma', \sigma_1, \sigma_3)$. Тогда $\tau|_{Ex_1 \perp Ex_2} \in Z(Ex_1 \perp Ex_2)$ и $\tau(\rho_3 P_{\varepsilon_1}) = \rho_3 P_{\varepsilon_1}$. Но $\tau(P_{\varepsilon_i} \cap \rho_3 P_{\varepsilon_i}) = P_{\varepsilon_i} \cap \rho_3 P_{\varepsilon_i} = P'_{\varepsilon_i}$ для $i = 1, 2$. Значит, $\tau(Ex_1 \perp Ey_1) = Ex_1 \perp Ey_1$ и $\tau(Ex_2 \perp Ey_2) = Ex_2 \perp Ey_2$. Так как $\tau x_1 \in Ex_1$ и $\tau x_2 \in Ex_2$, то $\tau y_1 \in Ey_1$ и $\tau y_2 \in Ey_2$. Пусть $\tau x_1 = \xi x_1$ и $\tau y_2 = \zeta y_2$. Так как $\tau P'_{\varepsilon_1} = P'_{\varepsilon_1}$ и $\tau \rho_3 P_{\varepsilon_1} = \rho_3 P_{\varepsilon_1}$, то

$$\tau(\alpha' x_1 + \beta' y_2) = \alpha' \xi x_1 + \beta' \zeta y_2 \in E(\alpha' x_1 + \beta' y_2),$$

откуда $\zeta = \xi$. Аналогично, $\tau y_1 = \xi y_1$, поэтому

$$\tau|_{Ex_1 \perp Ey_1 \perp Ex_2 \perp Ey_2} \in Z(Ex_1 \perp Ey_1 \perp Ex_2 \perp Ey_2).$$

Чтобы доказать включение $C(\sigma', \sigma_1, \sigma_3) \subseteq C(\sigma', \sigma_1, \sigma_2)$, положим $V = P'_{\varepsilon_1} \perp U \perp P'_{\varepsilon_2}$, где $U = Ex_1 \perp Ex_2 \perp Ey_1 \perp Ey_2$. Любой элемент τ из $C(\sigma', \sigma_1, \sigma_3)$ перестановочен с σ' и σ_1, поэтому остается проверить его перестановочность с σ_2. Поскольку $\tau \in C(\sigma', \sigma_1, \sigma_3)$, то P'_{ε_i} и U инвариантны относительно τ. Но $\tau|_U \in Z(U)$, значит, τ оставляет на месте

$$\rho_2 P_{\varepsilon_1} = P'_{\varepsilon_1} \perp E_{x_1} \perp E(\gamma_1 y_1 + \delta y_2).$$

Таким образом, $\tau \in C(\sigma_2)$ и $C(\sigma', \sigma_1, \sigma_3) \subseteq C(\sigma', \sigma_1, \sigma_2)$.

Пусть теперь $\tau \in \boldsymbol{U}_n^+(V)$ определяется правилом

$$\tau(y) = \begin{cases} y & \text{при } y \in P'_{\varepsilon_1} \perp P'_{\varepsilon_2}, \\ \eta y & \text{при } y \in Ex_1 \perp Ex_2, \\ \eta^* y & \text{при } y \in Ey_1 \perp Ey_2, \end{cases}$$

где $\eta \in \mathcal{U} - \{\pm 1\}$. Ясно, что $\tau \notin C(\sigma', \sigma_1, \sigma_3)$, так как $\tau|_U \notin Z(U)$. Столь же очевидно, что P_{ε_1}, $\rho_1 P_{\varepsilon_1}$ и $\rho_2 P_{\varepsilon_1}$ инвариантны относительно τ. Значит, $\tau \in C(\sigma', \sigma_1, \sigma_2)$.

Таким образом,

$$C(\sigma') \supset C(\sigma', \sigma_1) \supset C(\sigma', \sigma_1, \sigma_2) \supset C(\sigma', \sigma_1, \sigma_3).$$

Применяя Λ^{-1}, получим

$$C(\sigma) \supset C(\sigma, \Lambda^{-1}\sigma_1) \supset C(\sigma, \Lambda^{-1}\sigma_1, \Lambda^{-1}\sigma_2) \supset C(\sigma, \Lambda^{-1}\sigma_1, \Lambda^{-1}\sigma_3),$$

где $\Lambda^{-1}\sigma_1$, $\Lambda^{-1}\sigma_2$ и $\Lambda^{-1}\sigma_3$ сопряжены с изометрией σ, но не перестановочны с ней. Это противоречит теореме (3.5). Следовательно, $\dim P_{\varepsilon_1} = 1$, что и требовалось доказать.

Теперь покажем, что предположение, сделанное перед (3.4), всегда верно:

(3.7) $$P' \neq \{0\}.$$

Доказательство. Пусть, напротив, $P' = \{0\}$, т. е. $V = R'$ и σ' не имеет инвариантных прямых в V.

Если пространство V σ'-циклическое, т. е. существует такой вектор x, что $x, \sigma' x, \ldots, (\sigma')^{n-1} x$ порождают V, то, как показывают прямые вычисления, централизатор $C(\sigma')$ должен быть абелев. Но он не абелев, поэтому V не может быть σ'-циклическим.

Через U_y обозначим σ'-циклическое подпространство из V, порожденное вектором y. Утверждается, что существуют такие $y_1, \ldots, y_k$ из V, для которых

$$V = U_{y_1} \perp \ldots \perp U_{y_k}.$$

Пусть уже найдены такие $y_1, \ldots, y_j$, что $V = U_{y_1} \perp \ldots \perp U_{y_j} \perp W$. Тогда $U_{y_1}, \ldots, U_{y_j}$ и W инвариантны относительно σ'. Выберем такой $z \in W$, $z \neq 0$, чтобы $\dim U_z$ была минимальна. Пространство U_z или вполне изотропно, или регулярно. Мы утверждаем, что U_z можно считать регулярным. В самом деле, пусть $\dim U_z$ минимальна и U_z вполне изотропно.

Если $q(z, \rho z) = 0$ для всех $\rho \in C(\sigma')$, то рассмотрим трансвекцию τ_z^α, $\alpha \neq 0$. Имеем $\rho \tau_z^\alpha \rho^{-1} = \tau_{\rho z}^\alpha \in C(\tau_z^\alpha)$ для всех $\rho \in C(\sigma')$. Значит, $\Lambda^{-1} \tau_z^\alpha \in CC(\sigma) = S_x$ ввиду (3.1) и $\tau_z^\alpha \in CC(\sigma') \subseteq C(\sigma')$. Но тогда $\sigma' z \in Ez$, что противоречит условию $P' = \{0\}$.

Итак, существует изометрия $\rho \in C(\sigma')$, такая, что $q(z, \rho z) \neq 0$. Пусть $\rho z = u + w$, где $u \in U_{y_1} \perp \ldots \perp U_{y_j}$, $w \in W$. Тогда $q(z, w) \neq 0$ и $Q(\beta z + w) \neq 0$ при подходящем $\beta \in E^{\bullet}$.

Пусть $\dim U_z = l + 1$ и $\sigma'^{l+1} z = \sum_{\mu=0}^{l} \alpha_\mu \sigma'^\mu z$. Поскольку $\rho \in C(\sigma')$, справедливо равенство $\sigma'^{l+1} \rho z = \sum_{\mu=0}^{l} \alpha_\mu \sigma'^\mu \rho z$. Подставляя вместо ρz вектор $u + w$, получаем

$$\sigma'^{l+1} u + \sigma'^{l+1} w = \sum_{\mu=0}^{l} \alpha_\mu \sigma'^\mu u + \sum_{\mu=0}^{l} \alpha_\mu \sigma'^\mu w.$$

Значит,

$$\sigma'^{l+1} w = \sum_{\mu=0}^{l} \alpha_\mu \sigma'^\mu w.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma'^{l+1}(\beta z + w) = \sum_{\mu=0}^{l} \alpha_\mu \sigma'^{\mu} (\beta z + w),$$

и, поскольку размерность U_z минимальна, $\dim U_{\beta z + w}$ также минимальна. Так как $Q(\beta z + w) \neq 0$, то подпространство $U_{\beta z + w}$ регулярно.

Итак, мы можем выбрать вектор y_{j+1} из W, такой, что $U_{y_{j+1}}$ регулярно. Отсюда

$$V = U_{y_1} \perp \ldots \perp U_{y_j} \perp U_{y_{j+1}} \perp W'.$$

Продолжая таким образом дальше, получим требуемое разложение:

$$V = U_{y_1} \perp \ldots \perp U_{y_k}.$$

При этом $\dim U_{y_i} \geqslant 2$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Значит $k \leqslant n/2$ и $\dim V \geqslant 4$. Можно считать, что векторы y_i анизотропны.

Для подходящих η, ε из $\mathcal{U}$ изометрия $\rho'_i = \eta \tau^{\varepsilon}_{y_i}$ принадлежит $\Delta - Z(\Delta)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Пусть $\sigma'_i = \rho'_i \sigma' \rho'^{-1}_i$, тогда любая изометрия $\tau \in C(\sigma', \sigma'_1, \ldots, \sigma'_{k-1})$ оставляет на месте каждое подпространство U_{y_i}, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, а значит, и U_{y_k}. В самом деле, если $\tau y_i = u_i + v_i$, $u_i \in U_{y_i}$, $v_i \in U^{\perp}_{y_i}$, то $\sigma' v_i = \sigma'_i v_i$ и $\sigma' y_i \neq \sigma'_i y_i$. Значит, $\tau(\sigma' y_i - \sigma'_i y_i) = \sigma' u_i - \sigma'_i u_i \in \in U_{y_i}$ и τ отображает некоторый ненулевой вектор из U_{y_i} в U_{y_i}. Из минимальности $\dim U_{y_i}$ следует инвариантность подпространства U_{y_i} относительно τ.

Поскольку любое τ из $C(\sigma', \sigma'_1, \ldots, \sigma'_{k-1})$ оставляет на месте каждое U_{y_i}, то централизатор $C(\sigma', \sigma'_1, \ldots, \sigma'_{k-1})$ абелев.

Положим $\sigma_i = \Lambda^{-1} \sigma'_i$ и $\rho_i = \Lambda^{-1} \rho'_i$. Тогда $C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1})$ также абелев. Пусть $W = Ex + E\rho_1 x + \ldots + E\rho_{k-1} x$. Если $\tau \in \Delta$ и $\tau|_W \in R(W)$, то $\tau \in C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1})$. Кроме того, $\dim W \leqslant k \leqslant n/2$ и, значит, $\dim W^{\perp} \geqslant n/2 \geqslant 2$.

Подпространство W не является вполне изотропным, так как $Q(x) \neq 0$. Значит,

$$V = W_1 \perp (\operatorname{rad} W + U_1) \perp U_2,$$

где $W = W_1 \perp \operatorname{rad} W$ и $\operatorname{rad} W + U_1$ — гиперболическое пространство, причем U_1 вполне изотропно. При этом $\dim U_2 \geqslant 1$, потому что $\dim U_1 = \dim \operatorname{rad} W \leqslant k - 1$. Если $\operatorname{rad} W = \{0\}$,

имеем включение

$$1_W \perp U^+(W^\perp) \subseteq C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}),$$

что противоречит коммутативности $C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1})$. Следовательно, $\operatorname{rad} W \neq \{0\}$ и существуют $y \neq 0$ в $\operatorname{rad} W$ и $z \in U_2$, такой, что $Q(z) \neq 0$. При подходящих $\eta, \varepsilon \in \mathcal{U}$ изометрии $\eta\tau_z^\varepsilon$ и $\eta\tau_{z+y}^\varepsilon$ лежат в $C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}) - Z(\Delta)$, поскольку z и $z+y$ ортогональны подпространству W. Это снова противоречит коммутативности $C(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1})$.

Итак, $P' \neq \{0\}$, что и требовалось доказать.

(3.8) Теорема. *Пусть x — анизотропный вектор из V. Тогда $\Lambda S_x = S_y$ для некоторого анизотропного вектора y из V.*

Доказательство. Возьмем $\sigma \in S_x - Z(\Delta)$, тогда $C(\sigma) = C(S_x)$ и $\Lambda\sigma \in S_y - Z(\Delta)$ для некоторого анизотропного y из V. Следовательно,

$$\Lambda(S_x) = \Lambda CC(S_x) = \Lambda CC(\sigma) = CC(\Lambda\sigma) = S_y,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. S_x в случае изотропного вектора x

(4.1) Теорема. *Пусть x — изотропный вектор из V. Тогда $\Lambda S_x = S_y$ для некоторого изотропного вектора y из V.*

Доказательство. Пусть $V = (Ez + Ex) \perp U$, где $Ez + Ex \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $(Ex)^\perp = Ex \perp U$. Пусть также $U = Eu_1 \perp \ldots \perp Eu_{n-2}$, т. е. $\{u_1, \ldots, u_{n-2}\}$ — ортогональная база пространства U. Возьмем $\sigma \in S_x - Z(\Delta)$ и положим $\sigma' = \Lambda\sigma$. Поскольку Ex ортогонально U, то $S_u \subseteq C(\sigma)$ для всех $u \in U$. В частности, $S_{u_i} \subseteq C(\sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$. По теореме 3.7 существуют анизотропные векторы $u'_1, \ldots, u'_{n-2}$, такие, что $\Lambda(S_{u_i}) = S_{u'_i}$. Очевидно, $S_{u_i} \neq S_{u_j}$ при $i \neq j$ и $S_{u_i} \subseteq C(S_{u_j})$, следовательно, $S_{u'_i} \neq S_{u'_j}$ и $S_{u'_i} \subseteq C(S_{u'_j})$. Это означает, что векторы $u'_1, \ldots, u'_{n-2}$ попарно ортогональны и потому линейно независимы. Пусть $U' = Eu'_1 \perp \ldots \perp Eu'_{n-2}$. Конечно, $S_{u'_i} \subseteq C(\sigma')$ при $i = 1, 2, \ldots, n-2$, так как $S_{u_i} \subseteq C(\sigma)$. В частности, $\sigma' u'_i \in Eu'_i$ для каждого i.

Выберем вектор $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-2} u_{n-2}$, где все α_i ненулевые, $Q(v) \neq 0$. Снова $S_v \subseteq C(\sigma)$. В то же время $S_v \not\subseteq C(S_{u_i})$ при $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Положим $S_{v'} = \Lambda S_v$, тогда

$S_{v'} \subseteq C(\sigma')$, так что $\sigma' v' \in Ev'$. Пусть $\sigma' v' = \xi v'$ и $\sigma' u_i' = \xi_i u_i'$. Ясно, что $q(v', u_i') \neq 0$, так как $S_{v'} \not\subseteq C\left(S_{u_i'}\right)$. Отсюда сразу вытекает, что $\xi = \xi_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n-2$ и $\sigma'|_{U'} \in Z(U')$.

Пусть W — регулярное подпространство с ортогональной базой $x + u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$ и $V = (Ez' + Ex) \perp W$. Заменив в предыдущем рассуждении U' на подпространство W', порожденное векторами $(x + u_1)', u_2', \ldots, u_{n-2}'$, получим, что $\sigma'|_{W'} \in Z(W')$. Теперь $(x + u_1)'$ и u_1' ортогональны векторам $u_2', \ldots, u_{n-2}'$ и линейно независимы, потому что из $S_{x+u_1} \neq S_{u_1}$ следует, что $S_{(x+u_1)'} \neq S_{u_1'}$. Значит, $\dim(U' + W') = n - 1$. Так как $S_{x+u_1} \not\subseteq C(S_{u_1})$, то $q((x + u_1)', u_1') \neq 0$ и $\sigma'|_{U'+W'} \in R(U' + W')$.

Теперь воспользуемся тем, что $NCC(\sigma) \supset C(\sigma)$. Имеем $NCC(\sigma') \supset C(\sigma')$, поэтому $W' + U'$ нерегулярно. Действительно, в противном случае было бы $V = Ey \perp (W' + U')$, и $\sigma' \in S_y - Z(\Delta)$, причем y анизотропен. Но тогда, как мы уже видели в § 2, $NCC(\sigma') = C(\sigma')$.

Поскольку $W' + U'$ вырождено, можно записать $Ey = (W' + U')^{\perp} \subseteq W' + U'$. Следовательно, $\sigma'|_{(Ey)^{\perp}} \in R\left(Ey^{\perp}\right)$ и $\sigma' \in S_y - Z(\Delta)$. Отсюда

$$\Lambda S_x = \Lambda CC(\sigma) = CC(\sigma') = S_y,$$

что и требовалось доказать.

5. Изоморфизмы Φ_g и P_χ

В этом параграфе g будет обозначать полулинейный изоморфизм пространства V на себя, связанный с автоморфизмом μ основного поля E. Будем говорить, что g *сохраняет ортогональность*, если из $q(x, y) = 0$ следует, что $q(gx, gy) = 0$ для всех $x, y \in V$. Хорошо известно (см., например, [4], стр. 33—34), что g сохраняет ортогональность тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\alpha \neq 0$ из E, что $q(gx, gy) = \alpha q(x, y)^{\mu}$ для всех x, y из V. Таким образом, если g сохраняет ортогональность, то и g^{-1} сохраняет ортогональность; $q(x, y) = 0$ в том и только том случае, когда $q(gx, gy) = 0$ и $Q(gx) = \alpha Q(x)^{\mu}$ для всех x из V.

Определим теперь автоморфизм Φ_g: $\boldsymbol{GL}_n(V) \to \boldsymbol{GL}_n(V)$, полагая $\Phi_g(\sigma) = g\sigma g^{-1}$. Из определения непосредственно следует, что

$$\Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2} = \Phi_{g_1 g_2}, \quad \Phi_g^{-1} = \Phi_{g^{-1}}$$

и

$$\det(\Phi_g(\sigma)) = (\det \sigma)^{\mu}.$$

(5.1) *Если* σ *и* $\Phi_g(\sigma)$ *принадлежат* $\boldsymbol{U}_n(V)$ *и* σ *имеет собственное пространство* P *и вычетное пространство* R, *то* $\Phi_g(\sigma)$ *имеет собственное пространство* gP *и вычетное пространство* gR.

Доказательство очевидно.

(5.2) *Если для любых анизотропных векторов* x, y *из* V *равенство* $q(x, y)=0$ *влечет за собой равенство* $q(gx, gy)=0$, *то* g *сохраняет ортогональность.*

Доказательство. См. утверждение 3.2 из работы О'Миры [6].

(5.3) Φ_g *является автоморфизмом группы* $\boldsymbol{U}_n(V)$ *в том и только том случае, когда* g *сохраняет ортогональность.*

Доказательство. Пусть g сохраняет ортогональность. Тогда

$$Q(\Phi_g(\sigma)(x))=Q(g\sigma g^{-1}(x))=$$
$$=\alpha Q(\sigma g^{-1}(x))^{\mu}=\alpha Q(g^{-1}x)^{\mu}=\alpha(\alpha^{-1}Q(x))^{\mu^{-1}\mu}=Q(x)$$

для всех $x\in V$. Значит, $\Phi_g(\sigma)\in\boldsymbol{U}_n(V)$.

Теперь предположим, что Φ_g — автоморфизм группы $\boldsymbol{U}_n(V)$. Пусть x_1, x_2 — анизотропные векторы из V и $q(x_1,x_2)=0$. Возьмем изометрии $\sigma_1\in S_{x_1}-Z(V)$ и $\sigma_2\in S_{x_2}-Z(V)$. Тогда $\Phi_g(\sigma_1)\in S_{gx_1}-Z(V)$ и $\Phi_g(\sigma_2)\in S_{gx_2}-Z(V)$. Но $\sigma_2\in C(\sigma_1)$, значит, $\Phi_g(\sigma_2)\in C(\Phi_g(\sigma_1))$ и $gx_2\in Egx_1\cup Egx_1^{\perp}$. Так как $C(\sigma_1)\neq C(\sigma_2)$, то и $C(\Phi_g(\sigma_1))\neq C(\Phi_g(\sigma_2))$, $gx_2\notin Egx_1$. Поэтому $q(gx_1, gx_2)=0$, что и требовалось доказать.

Изоморфизм Λ: $\Delta\to\boldsymbol{U}_n(V)$ называется *гомотетией*, если существует гомоморфизм χ: $\Delta\to Z_n(V)$, удовлетворяющий условию, что $\Lambda(\sigma)=\chi(\sigma)\cdot\sigma$ для всех $\sigma\in\Delta$. Данная гомотетия определяет единственный гомоморфизм χ, и мы обозначаем ее через P_χ.

(5.4) *Пусть* g_1, g_2 — *полулинейные изоморфизмы пространства* V *на себя, сохраняющие ортогональность. Пусть* P_{χ_1}, P_{χ_2} — *гомотетии* Δ. *Следующие условия равносильны:*

(1) $\Phi_{g_1}\circ P_{\chi_1}=\Phi_{g_2}\circ P_{\chi_2}$,

(2) $P_{\chi_1}=P_{\chi_2}$ *и* $\Phi_{g_1}=\Phi_{g_2}$,

(3) $\chi_1=\chi_2$ *и* $g_1=\alpha g_2$ *для некоторого* $\alpha\in E^{\bullet}$.

Доказательство. (3)$\Rightarrow$(2). Заметим, что если $g_1 = \alpha g_2$, то $g_1^{-1} = (\alpha^{-1})^{\mu^{-1}} g_2^{-1}$. Тогда

$$g_1 \sigma g_1^{-1}(x) = g_1 \sigma (\alpha^{-1})^{\mu^{-1}} g_2^{-1}(x) =$$
$$= \alpha^{-1} g_1 \sigma g_2^{-1}(x) = (\alpha^{-1})(\alpha) g_2 \sigma g_2^{-1}(x) = g_2 \sigma g_2^{-1}(x)$$

для всех $x \in V$. Значит, $\Phi_{g_1} = \Phi_{g_2}$. Очевидно, что $P_{\chi_1} = P_{\chi_2}$.

(2)$\Rightarrow$(1). Очевидно.

(1)$\Rightarrow$(3). Имеем $\Phi_{g_1} \circ P_{\chi_1} = \Phi_{g_2} \circ P_{\chi_2}$, или

$$\Phi_{g_1}(\chi_1(\sigma) \cdot \sigma) = \Phi_{g_2}(\chi_2(\sigma) \cdot \sigma),$$

поэтому

$$\Phi_{g_1}(\chi_1(\sigma) \cdot \sigma) = \Phi_{g_2}(\chi_2(\sigma))^{-1} \cdot \Phi_{g_1}(\chi_1(\sigma)) \in Z_n(V)$$

для всех $\sigma \in \Delta$. Отсюда $g_2 \sigma g_2^{-1} g_1 \sigma^{-1} g_1^{-1}(x) \in Ex$ для всех $x \in V$. В частности, $\sigma g_2^{-1} g_1(x) \in E g_2^{-1} g_1 \sigma(x)$. Пусть вектор x анизотропен и $V = Ex \perp U$. Пусть $g_2^{-1} g_1(x) = \alpha x + u$. Если $\alpha = 0$, то u анизотропен и можно записать $U = Eu \perp U'$. Возьмем $\rho \in \boldsymbol{U}^+(U)$ с условием, что $\rho u \notin Eu$, и положим $\sigma = 1_{Ex} \perp \rho$. Тогда $\sigma g_2^{-1} g_1(x) = \sigma u = \rho u \notin Eu$, но $g_2^{-1} g_1 \sigma(x) = g_2^{-1} g_1(x) = u$. Значит, $\alpha \neq 0$.

Теперь возьмем $\sigma = \eta \tau_x^{\varepsilon} \in S_x - Z(\Delta)$. Тогда

$$\sigma g_2^{-1} g_1(x) = \sigma(\alpha x + u) = \eta \varepsilon \alpha x + \eta u$$

и $g_2^{-1} g_1 \sigma(x) = g_2^{-1} g_1(\eta \varepsilon x) = \xi(\alpha x + u)$ для некоторого $\xi \in E^{\bullet}$. Следовательно,

$$\sigma g_2^{-1} g_1(x) \in E g_2^{-1} g_1 \sigma(x)$$

только в том случае, когда $u = 0$. Отсюда $g_2^{-1} g_1(x) = \alpha x$ и $g_2^{-1} g_1$ — полулинейный изоморфизм пространства V, оставляющий на месте все анизотропные прямые. Значит, существует элемент $\alpha \in E^{\bullet}$, такой, что $g_2^{-1} g_1(x) = \alpha x$ для всех $x \in V$. Поэтому $g_1(x) = g_2(\alpha x) = \alpha^{\mu} g_2(x)$ для всех $x \in V$, откуда $g_1 = \alpha^{\mu} g_2$.

Из равенства $g_1 = \alpha^{\mu} g_2$ следует, что $\Phi_{g_1} = \Phi_{g_2}$, а это вместе с (1) дает $P_{\chi_1} = P_{\chi_2}$ и $\chi_1 = \chi_2$. Тем самым утверждение (5.4) доказано.

§ 6. Автоморфизмы группы Δ

В этом последнем параграфе мы покажем, что произвольный автоморфизм Λ группы Δ имеет вид $\Lambda(\sigma) = \chi(\sigma) \cdot \Phi_g(\sigma)$ для некоторых χ и g.

Мы уже убедились, что Λ переставляет множества S_x, т. е. $\Lambda S_x = S_{x'}$, причем x' изотропен в том и только том случае, когда x изотропен. Так как Λ^{-1} — тоже автоморфизм, то эта перестановка взаимно однозначна. Полагая $L = Ex$ и $L' = Ex'$, видим, что имеется взаимно однозначное соответствие между прямыми из V, потому что $S_x = S_y$ тогда и только тогда, когда $x \in Ey$.

(6.1) *Соответствие между прямыми, определенное автоморфизмом* Λ, *сохраняет ортогональность, т. е.* $q(L_1, L_2) = 0$ *влечет за собой* $q(L'_1, L'_2) = 0$.

Доказательство. Обозначим $L_i = Ex_i$ и $L'_i = Ex'_i$, $i = 1, 2$. Так как $q(x_1, x_2) = 0$, то $S_{x_1} \subseteq C(S_{x_2})$ и либо $x_1 \in Ex_2$, либо $S_{x_1} \neq S_{x_2}$. Если $x_1 \in Ex_2$, то $S_{x_1} = S_{x_2}$ и $Q(x_1) = Q(x_2) = 0$. Поэтому $S_{x'_1} = S_{x'_2}$ и $Q(x'_1) = Q(x'_2) = 0$. Если $x_1 \notin E_{x_2}$, то $S_{x'_1} \subseteq C(S_{x'_2})$ и $S_{x'_1} \neq S_{x'_2}$. Отсюда $q(L'_1, L'_2) = 0$, что и требовалось доказать.

Так как $\Lambda^{-1} \circ \Lambda = \mathrm{id}$, то $q(L_1, L_2) = 0 \Leftrightarrow q(L'_1, L'_2) = 0$.

(6.2) *Если* L_i — *прямые из* V *и* L'_i — *соответствующие им прямые,* $i = 1, 2, 3$, *то из* $L_1 \subseteq L_2 + L_3$ *следует* $L'_1 \subseteq L'_2 + L'_3$.

Доказательство. Пусть $W = L_2 + L_3$, $W' = L'_2 + L'_3$. Тогда

$$L \subseteq W^{\perp} \Leftrightarrow q(L, L_i) = 0, \quad i = 2, 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow q(L', L'_i) = 0, \quad i = 2, 3 \Leftrightarrow L' \subseteq (W')^{\perp}.$$

Возьмем прямую $L' \subseteq (W')^{\perp}$. Тогда $L \subseteq W^{\perp}$ и $q(L, L_1) = 0$. Значит, $q(L', L'_1) = 0$ и $L'_1 \subseteq (W')^{\perp\perp} = W'$, что и требовалось доказать.

По основной теореме проективной геометрии это соответствие прямых индуцировано полулинейным изоморфизмом g пространства V на себя. Очевидно, g сохраняет ортогональность, поэтому $\Phi_g\colon \Delta \to U_n(V)$ — изоморфизм. Соответствие прямых, индуцированное автоморфизмом Φ_g, совпадает с тем, которое индуцировано автоморфизмом Λ, т. е. если $\sigma \in S_x$, то $\Lambda\sigma \in \overline{S}_{gx}$, где

$$\overline{S}_{gx} = \{\rho \in \boldsymbol{U}_n(V) \mid \rho|_{(Egx)^{\perp}} \in R(Egx^{\perp})\}.$$

Поэтому $\Phi_g^{-1} \circ \Lambda\colon \Delta \to \boldsymbol{U}_n(V)$ — изоморфизм, индуцирующий тождественное соответствие прямых.

(6.3) $\psi = \Phi_g^{-1} \circ \Lambda$ — *гомотетия группы* Δ *в группу* $\boldsymbol{U}_n(V)$.

Доказательство. Мы знаем, что $\psi(S_x) \subseteq \overline{S}_x$ для всех $x \in V$. Пусть Σ — произвольный элемент из Δ и $\sigma \in S_x - Z(\Delta)$. Тогда

$$\psi(\Sigma \sigma \Sigma^{-1}) = \psi(\Sigma)\psi(\sigma)\psi(\Sigma)^{-1} \in \overline{S}_{\psi(\Sigma)x}$$

и

$$\psi(\Sigma \sigma \Sigma^{-1}) \in \overline{S}_{\Sigma x}.$$

Отсюда $\overline{S}_{\psi(\Sigma)x} = \overline{S}_{\Sigma x}$ и $\psi(\Sigma)x \in E\Sigma x$ для всех $x \in V$, $\Sigma \in \Delta$. Поэтому $\psi(\Sigma)\Sigma^{-1}(x) \in Ex$ для всех x, Σ и $\psi(\Sigma)\Sigma^{-1} \in Z_n(V)$ для всех $\Sigma \in \Delta$. Положим $\chi(\Sigma) = \psi(\Sigma)\Sigma^{-1}$. Тогда $\psi(\Sigma) = \chi(\Sigma)\cdot\Sigma$, и так как ψ — изоморфизм, то отображение $\chi\colon \Delta \to Z_n(V)$ должно быть гомоморфизмом. Утверждение (6.3) доказано.

Теперь легко получается наш основной результат.

(6.4) Теорема. *Пусть V — невырожденное эрмитово пространство над бесконечным полем E размерности $n \geqslant 3$. Пусть Δ — группа, заключенная между $\boldsymbol{U}_n^+(V)$ и $\boldsymbol{U}_n(V)$, т. е. $\boldsymbol{U}_n^+(V) \subseteq \Delta \subseteq \boldsymbol{U}_n(V)$. Если Λ — автоморфизм группы Δ, то*

$$\Lambda(\sigma) = \Phi_g \circ P_\chi(\sigma) = \chi(\sigma)^{\mu^{-1}}\Phi_g(\sigma), \qquad \sigma \in \Delta,$$

где изоморфизмы P_χ и Φ_g определены однозначно.

Доказательство. По предыдущему для полулинейного отображения g, индуцированного автоморфизмом Λ, имеем равенство

$$\Phi_g^{-1} \circ \Lambda = P_\chi,$$

где P_χ — гомотетия. Применяя Φ_g к обеим частям, получим

$$\Lambda(\sigma) = \Phi_g \circ P_\chi(\sigma) = \chi(\sigma)^{\mu^{-1}} \cdot \Phi_g(\sigma),$$

что и требовалось доказать.

(6.5) Следствие. *Если $\Delta = \boldsymbol{U}_n(V)$ или $\Delta = \boldsymbol{U}_n^+(V)$, то P_χ и Φ_g — автоморфизмы группы Δ.*

Доказательство. Если $\sigma \in \boldsymbol{U}_n^+(V)$, то $\det(\Phi_g(\sigma)) = (\det\sigma)^\mu = 1$. Значит, $\Phi_g(\sigma) \in \boldsymbol{U}_n^+(V)$, и, следовательно, Φ_g и $P_\chi = \Phi_g^{-1} \circ \Lambda$ — автоморфизмы группы Δ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Artin, Geometric algebra, Interscience Publishers, New York — London, 1957. [Русский перевод: Э. Артин, Геометрическая алгебра, «Наука», М., 1969.]

2. N. Bourbaki, Formes sesquilinéares et formes quadratiques, Algébre, Chapter IX, Paris, 1959. [Русский перевод: Н. Бурбаки, Алгебра, гл. IX, «Наука», М., 1966.]

3. J. Dieudonné, Sur les groupes classiques, Hermann, Paris, 1948.

4. J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1963. [Русский перевод: Ж. Дьёдонне, Геометрия классических групп, «Мир», М., 1974.]

5. A. Johnson, The automorphisms of unitary groups over a field of characteristic 2, *Amer. J. Math.*, **93**, № 2 (1971), 367—384.

6. O. T. O'Meara, The automorphisms of the orthogonal groups $\Omega_n(V)$ over fields, *Amer. J. Math.*, **90**, (1968), 1260—1306.

7. O. T. O'Meara, The automorphisms of the linear groups over any integral domain, *J. reine angew. Math.*, **223** (1966), 56—100.

8. C. E. Rickart, Isomorphic groups of linear transformations, *Amer. J. Math.*, **72**, № 3 (1950), 451—464.

9. C. E. Rickart, Isomorphic groups of linear transformations, II, *Amer. J. Math.*, **73**, № 3 (1951), 697—716.

10. E. Spiegel, On the automorphisms of the unitary group over a field of characteristic 2, *Amer. J. Math*, **89**, № 1 (1967), 43—50.

О СТРОЕНИИ ГРУППЫ GL_2 НАД КОЛЬЦОМ [1])

П. Кон

Из введения [2])

Общая линейная группа над телом, ее подгруппы и автоморфизмы изучены довольно хорошо (см. [3] и содержащиеся там ссылки), однако мало что известно о соответствующих группах над произвольными кольцами. Отправной точкой в случае тел является замечание о том, что каждая обратимая матрица над телом есть произведение элементарных матриц. Естественно исследовать группы $\boldsymbol{GL}_n(R)$ и над другими кольцами с этим свойством, поэтому мы вводим в рассмотрение *обобщенно евклидовы кольца*, или, короче, *GE-кольца*, определяя их как такие области целостности (не обязательно коммутативные), над которыми для любого n выполняется условие

GE_n. Каждая обратимая матрица порядка n является произведением элементарных матриц.

GE-кольцами будут, например: 1) классические евклидовы кольца, 2) кольца со слабым алгоритмом [2], в частности свободные ассоциативные алгебры над полем, 3) групповые алгебры свободных групп и свободные произведения тел.

В настоящей работе изучается группа $\boldsymbol{GL}_2(R)$ над различными типами колец, в частности над GE-кольцами. В отличие от евклидовых колец GE-кольца имеют внутреннее определение, не использующее функцию нормы, однако наиболее полное описание мы получим для $\boldsymbol{GL}_2(R)$, когда R обладает такой функцией, точнее, когда R имеет дискретную норму, а также в случае, когда R — дискретно упорядоченное кольцо.

Основным орудием нашего исследования будет точное описание группы $\boldsymbol{GL}_2(R)$ в терминах порождающих и определяющих соотношений, когда R — так называемое универсальное GE-кольцо. Из этого описания будет видно, что $\boldsymbol{GL}_2(R)$ мало зависит от мультипликативного строения

---

[1]) P. M. Cohn, On the structure of the $\boldsymbol{GL}_2$ of a ring, *Publs math. IHES*, № 30 (1966), 5—53.

[2]) Введение и § 2—8 публикуются в кратком изложении, § 11, 12 — в полном переводе. — *Прим. ред.*

кольца R, в чем проявляется существенное различие между $\boldsymbol{GL}_n(R)$ при $n=2$ и $n>2$. Мы определим затем обобщение кольцевого гомоморфизма — U-гомоморфизм GE-колец, который, как и кольцевой, тоже индуцирует гомоморфизм соответствующих групп $\boldsymbol{GL}_2$. В качестве иллюстрации стоит отметить, что для любой свободной ассоциативной алгебры A над полем F не более чем счетного ранга группа $\boldsymbol{GL}_2(A)$ изоморфна группе $\boldsymbol{GL}_2(F[x])$ и известные нестандартные автоморфизмы группы $\boldsymbol{GL}_2(F[x])$, построенные Райнером [6], очень просто получаются с этой точки зрения.

Мы рассмотрим также изоморфизмы между группами $\boldsymbol{GL}_2$ над GE-кольцами в предположении, что кольца снабжены „остепеняющей" функцией, причем элементы степени нуль обратимы. Будет доказано, что любой такой изоморфизм является композицией изоморфизма, индуцированного U-изоморфизмом или U-антиизоморфизмом, центральной гомотетии и внутреннего автоморфизма (как и для тел [3], где U-(анти)-изоморфизмы превращаются в обычные (анти)изоморфизмы). Доказательство базируется на том, что над кольцами указанного типа все диэдральные подгруппы порядка 8 сопряжены, если характеристика тела $\neq 2$, а в характеристике 2 сопряжены все подгруппы, изоморфные симметрической подгруппе степени 3.

Сводка необходимых результатов из § 2—8

Пусть R — (ассоциативное) кольцо с единицей. Обобщая понятие k-алгебры при коммутативном k, назовем кольцо R с единицей *k-кольцом*, если зафиксирован некоторый гомоморфизм $\theta\colon k\to R$, отображающий 1 в 1.

Пусть R — ассоциативное кольцо с 1. Элементы из R обозначаются латинскими, а обратимые элементы из R — греческими буквами. Пусть $U(R)$ — группа единиц (т. е. обратимых элементов) кольца R, $U_0(R)=U(R)\cup\{0\}$. Положим

$$[\alpha,\beta]=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix},\quad D(\alpha)=[\alpha,\alpha^{-1}],\quad E(a)=\begin{pmatrix}a & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\qquad(2.1)$$

и обозначим через $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_2(R)$ группу обратимых диагональных матриц порядка 2 с коэффициентами из R, а через $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_2(R)$ — группу, порожденную всеми $E(a)$, $a\in R$. Пусть $B_{ij}(a)=I+ae_{ij}$, где $i\neq j$, I — единичная матрица, а e_{ij} — обычная матричная единица. Тогда

$$B_{12}(a)=E(-a)E(0)^{-1},\qquad B_{21}(a)=E(0)^{-1}E(a)$$

и

$$E(0)=B_{12}(1)B_{21}(-1)B_{12}(1),\qquad E(a)=B_{12}(-a)E(0),$$

откуда легко усмотреть, что $\boldsymbol{E}_2(R)$ порождается также всеми $B_{ij}(a)$ $(a \in R,\ i \neq j)$. Хорошо известно, что если R — евклидово кольцо, то $\boldsymbol{GL}_2(R)$ порождается элементарными матрицами

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае это не так, и мы обозначим группу, порожденную указанными матрицами, через $\boldsymbol{GE}_2(R)$. Кольца R, для которых $\boldsymbol{GE}_2(R) = \boldsymbol{GL}_2(R)$, назовем *$GE_2$-кольцами.* Очевидно, такими будут все GE-кольца, определенные во введении. Ясно также, что $\boldsymbol{GE}_2(R)$ порождается группами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$.

Для матриц (2.1) выполняются следующие соотношения:

$$E(x)\,E(0)\,E(y) = -E(x+y), \tag{2.2}$$

$$E(\alpha)\,E(\alpha^{-1})\,E(\alpha) = -D(\alpha), \tag{2.3}$$

$$E(x)\,[\alpha,\ \beta] = [\beta,\ \alpha]\,E\left(\beta^{-1}x\alpha\right). \tag{2.4}$$

Здесь $x, y \in R$, α, $\beta \in U(R)$. Кольцо, для которого соотношения (2.2)—(2.4) вместе с соотношениями группы $\boldsymbol{D}_2(R)$ составляют полное множество определяющих соотношений группы $\boldsymbol{GE}_2(R)$, назовем *универсальным для* $\boldsymbol{GE}_2$. В частности, представляют интерес GE_2-кольца, которые универсальны для $\boldsymbol{GE}_2$, или, короче, *универсальные GE_2-кольца.*

Из соотношений (2.2)—(2.4) и соотношений группы $\boldsymbol{D}_2(R)$ вытекают следующие соотношения:

$$E(0)^2 = -I, \qquad E(1)^3 = -I, \qquad E(-1)^3 = I, \tag{2.5}$$

$$E(x)^{-1} = E(0)\,E(-x)\,E(0), \tag{2.6}$$

$$E(x)\,E(y)^{-1} = E(x-y)\,E(0)^{-1} = -E(x-y)\,E(0), \tag{2.7}$$

$$E(x)\,E(y)^{-1}\,E(z) = E(x-y+z), \tag{2.8}$$

$$E(x)\,E(\alpha^{-1})\,E(y) = E(x-\alpha)\,D(\alpha^{-1})\,E(y-\alpha), \tag{2.9}$$

$$E(x)\,E(\alpha+1)\,E(\beta+1)\,E(y) =$$
$$= -E\left(x-\alpha^{-1}\right)D(\alpha)\,E\left(-1-\alpha^{-1}-\beta^{-1}\right)D(\beta)\,E\left(y-\beta^{-1}\right). \tag{2.10}$$

Кроме того, из них следует, что группа $\boldsymbol{E}_2(R)$ нормальна в $\boldsymbol{GE}_2(R)$ и каждый элемент A из $\boldsymbol{GE}_2(R)$ записывается в *стандартной форме*

$$A = [\alpha,\ \beta]\,E(a_1)\ \ldots\ E(a_r), \tag{2.11}$$

где α, $\beta \in U(R)$, $a_i \in R$, причем $a_i \notin U_0(R)$ при $1 < i < r$ и a_1, a_2 не равны одновременно нулю при $r = 2$.

Если каждая матрица A из $\boldsymbol{GE}_2(R)$ имеет единственную стандартную форму, то мы скажем, что кольцо R имеет *единственную стандартную форму для* $\boldsymbol{GE}_2$. Кольцо R назовем *квазисвободным* для $\boldsymbol{GE}_2$, если на $\boldsymbol{GE}_2(R)$ нет соотношений вида $W = I$, где W — нетривиальное слово стандартной формы. Ясно, что в списке свойств:

1) R имеет единственную стандартную форму для $\boldsymbol{GE}_2$,
2) R квазисвободно для $\boldsymbol{GE}_2$,
3) R универсально для $\boldsymbol{GE}_2$

каждое предыдущее свойство сильнее последующего. Отметим, что существуют примеры, показывающие попарное различие этих трех классов.

Оказывается, что квазисвободными для $\boldsymbol{GE}_2$ будут все дискретно нормированные кольца, а кольцами с единственной стандартной формой для $\boldsymbol{GE}_2$ — все дискретно упорядоченные кольца. Сформулируем необходимые в дальнейшем определения и теоремы об этих кольцах.

Определение. *Норма* на кольце R — это отображение $|\ |$ из R в множество неотрицательных действительных чисел, удовлетворяющее условиям

N.1. $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$,

N.2. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$,

N.3. $|xy| = |x||y|$.

Будем говорить, что норма $|\ |$ *дискретна*, а R — *дискретно нормированное кольцо*, если

N.4. $|x| \geqslant 1$ для всех $x \neq 0$ и равенство возможно лишь при $x \in U(R)$,

N.5. не существует элемента $x \in R$, для которого $1 < |x| < 2$.

Легко видеть, что при выполнении N.1, N.2, N.3 условия N.4 и N.5 равносильны условиям

N.4′. $|\alpha| = 1$ для всех $\alpha \in U(R)$,

N.5′. $|x| \geqslant 2$ для всех $x \notin U_0(R)$.

Определим по индукции последовательность целочисленных многочленов от неперестановочных переменных $t_1, t_2, \ldots$:

$$e_{-1} = 0,\ e_0 = 1,$$
$$e_n(t_1, \ldots, t_n) = e_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1})t_n - e_{n-2}(t_1, \ldots, t_{n-2}). \tag{5.1}$$

Заметим, что для $n \geqslant 0$ номер многочлена e_n совпадает с числом его аргументов, поэтому в дальнейшем при точно выписанных аргументах индекс опускается. Имеет место равенство

$$E(a_1) \ldots E(a_r) = \begin{pmatrix} e(a_1, \ldots, a_r) & e(a_1, \ldots, a_{r-1}) \\ -e(a_2, \ldots, a_r) & -e(a_2, \ldots, a_{r-1}) \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Следующая лемма — основная в вопросах единственности представления элементов $GE_2(R)$ в стандартной форме, когда R — дискретно нормированное кольцо.

Лемма 5.1. *Пусть $a_1, \ldots, a_r$ $(r > 1)$ — элементы дискретно нормированного кольца R, такие, что $a_i \notin U_0(R)$ при $i > 1$. Тогда*

$$|e(a_1, \ldots, a_r)| \geqslant |e(a_1, \ldots, a_{r-1})| \tag{5.3}$$

и

$$e(a_1, \ldots, a_r) \neq 0. \tag{5.4}$$

Пусть, кроме того, норма на R удовлетворяет условию: если $u \in R$, $|u| = 1$ и $|u+1| = 2$, то $u = 1$. Тогда неравенство (5.3) *можно считать строгим, за исключением случая, когда $|2| = 2$, $a_1 = \alpha \in U(R)$, $a_2 = a_4 = \ldots = 2\alpha^{-1}$, $a_3 = a_5 = \ldots \ldots = 2\alpha$. В этом исключительном случае $E(a_1) \ldots E(a_r)$ равно $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ * & * \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$ в соответствии с четностью или нечетностью числа r.*

Из леммы 5.1 легко следует

Теорема 5.2. *Каждое дискретно нормированное кольцо квазисвободно для GE_2 и, значит, универсально для GE_2.*

Как показывает следующее предложение, стандартная форма элемента упрощается, если он имеет конечный порядок.

Предложение 5.4. *Пусть R — кольцо, квазисвободное для GE_2. Всякая матрица из $GE_2(R)$, имеющая конечный порядок по модулю центра группы $GE_2(R)$, сопряжена с элементом вида $[\alpha, \beta]E(a)$ или $[\alpha, \beta]E(0)E(b)$, причем в первом случае $a \in U_0(R)$.*

Заметим, что матрица $[\alpha, \beta]E(a)$ сопряжена в $GE_2(R)$ с матрицей вида $[1, \beta]E(a)$.

Следующая теорема уточняет стандартную форму для *инволюций*, т. е. элементов порядка 2. [1])

Теорема 5.5. *Пусть R — область целостности, квазисвободная для GE_2. Всякая инволюция $\neq -I$ в $GE_2(R)$ сопряжена с одной из матриц вида*

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & -1 \end{pmatrix},$$

[1]) В других работах используется несколько иное определение инволюции — ср. стр. 64. — *Прим. ред.*

где h пробегает фиксированную заранее систему представителей смежных классов аддитивной подгруппы 2R в R.

В частности, если $2R = R$, то каждая нецентральная инволюция сопряжена с $[1, -1]$.

Отметим следующие примеры дискретно нормированных колец:

1. Кольца алгебраических чисел в поле комплексных чисел с обычной нормой.

2. Пусть R — кольцо и $U_0(R)$ — тело, которое мы обозначим через k. Предположим, что на R задана *остепеняющая функция*, т. е. каждому $a \in R$ сопоставлено неотрицательное целое число или $-\infty$, обозначаемое $d(a)$, причем

D.1. $d(a) = -\infty$ тогда и только тогда, когда $a = 0$,

D.2. $d(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a \in U(R)$,

D.3. $d(a-b) \leqslant \max\{d(a), d(b)\}$,

D.4. $d(ab) = d(a) + d(b)$.

Кольцо R легко превращается в дискретно нормированное, если положить $|a| = 2^{d(a)}$. Назовем R *остепененным k-кольцом*. Таковы, например, кольца многочленов над k от любого числа переменных, а также свободные ассоциативные алгебры над полем k.

3. Если R — дискретно нормированное кольцо, то кольцо многочленов от одной переменной $R[x]$ может быть дискретно нормировано по правилу

$$\left|\sum a_i x^i\right| = \sum |a_i| 2^i.$$

Для остепененных k-колец справедлива более сильная, чем для дискретно нормированных колец.

Теорема 7.1. *Всякое остепененное k-кольцо имеет единственную стандартную форму для* $\boldsymbol{GE}_2$ *и, значит, универсально для* $\boldsymbol{GE}_2$.

Хорошо поддается изучению группа $\boldsymbol{GE}_2(R)$, если R — дискретно упорядоченное кольцо.

Определение. *Дискретно упорядоченным кольцом* называется линейно упорядоченное кольцо R, в котором для всякого $a \in R$ из $a > 0$ следует $a \geqslant 1$.

Чтобы описать $\boldsymbol{GE}_2(R)$ в этом случае, полезно включить в порождающее множество, кроме диагональных матриц, матрицы с положительными коэффициентами, поэтому мы заменим $E(x)$ на

$$P(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В новых порождающих легко переписываются соотношения (2.2) — (2.10), может быть получен аналог леммы 5.1 и доказана

Теорема 8.2. *Пусть R — дискретно упорядоченное кольцо. Тогда R универсально для $\boldsymbol{GE}_2$; более того, каждая матрица $A \in \boldsymbol{GE}_2(R)$ имеет единственную форму*

$$A = [\alpha, \beta] P(a_1) \ldots P(a_r), \quad a_i \in R, \ \alpha, \beta \in U(R),$$

где $a_1 \geqslant 0$, $a_i > 0$ при $1 < i < r$, а если $r = 2$, то a_1 и a_2 не равны нулю одновременно.

Отметим следующие очевидные примеры дискретно упорядоченных колец: кольцо целых чисел, кольцо многочленов от нескольких переменных над кольцом целых чисел. Вообще, если R дискретно упорядочено, то таково и кольцо многочленов $R[x]$. Вместе с тем, хотя $R[x]$ универсально для $\boldsymbol{GE}_2$, оно не будет GE_2-кольцом. В частности, кольца многочленов $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_d]$ не являются GE_2-кольцами при $d \geqslant 1$.

§ 11. Построение гомоморфизмов между общими линейными группами

Пусть f: $R \to S$ — гомоморфизм колец[1]). Ясно, что он индуцирует гомоморфизм матричных колец f_n: $R_n \to S_n$ и гомоморфизм групп

$$f^*: \boldsymbol{GL}_n(R) \to \boldsymbol{GL}_n(S). \tag{11.1}$$

Допустим, что g: $R \to S$ — антигомоморфизм колец, тогда g индуцирует антигомоморфизм групп g^*: $\boldsymbol{GL}_n(R) \to \boldsymbol{GL}_n(S)$. Его композиция со взятием обратного элемента в группе $\boldsymbol{GL}_n(S)$ есть снова гомоморфизм групп

$$\check{g}: \boldsymbol{GL}_n(R) \to \boldsymbol{GL}_n(S). \tag{11.2}$$

В частности, при $S = R$ автоморфизмы и антиавтоморфизмы кольца R поднимаются таким способом до автоморфизмов группы $\boldsymbol{GL}_n(R)$. Но так получаются не все автоморфизмы группы $\boldsymbol{GL}_n(R)$. Если σ — гомоморфизм группы $\boldsymbol{GL}_n(R)$ в группу центральных единиц из R, то отображение $A \mapsto A \cdot A^\sigma$ будет эндоморфизмом группы $\boldsymbol{GL}_n(R)$, который мы назовем *центральной гомотетией*. Изучая автоморфизмы группы $\boldsymbol{GL}_n(R)$, мы увидим позже, что для $n \geqslant 3$ и для довольно широкого класса колец каждый автоморфизм группы $\boldsymbol{GL}_n(R)$ является комбинацией f^* или $\check{g}$ с некоторым внутренним

---

[1]) Подразумевается, что такой гомоморфизм отображает единицу кольца в единицу.

автоморфизмом и центральной гомотетией. Для $n=2$ положение иное, здесь нам понадобится следующее

Определение. Пусть R, S — кольца. Отображение f: $R \to S$ называется *U-гомоморфизмом*, если f — гомоморфизм $x \mapsto x'$ аддитивной группы R в аддитивную группу S, причем

$$1' = 1 \tag{11.3}$$

и

$$(\alpha a \beta)' = \alpha' a' \beta' \text{ для всех } a \in R,\ \alpha,\ \beta \in U(R). \tag{11.4}$$

Если g — гомоморфизм аддитивной группы R в аддитивную группу S, удовлетворяющий (11.3) и вместо (11.4) удовлетворяющий условию

$$(\alpha a \beta)' = \beta' a' \alpha' \text{ для всех } a \in R,\ \alpha,\ \beta \in U(R), \tag{11.5}$$

то g называется *U-антигомоморфизмом.*

Очевидно, U-гомоморфизм тел является обычным гомоморфизмом, это верно и для U-антигомоморфизма. Более того, справедливо более общее

Предложение 11.1. *Пусть R — кольцо, порождаемое (как кольцо) своими единицами. Тогда любой U-гомоморфизм кольца R в произвольное кольцо будет гомоморфизмом, а U-антигомоморфизм — антигомоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $x \mapsto x'$ — некоторый U-гомоморфизм и

$$R_0 = \{x \in R \mid (xa)' = x'a' \text{ для всех } a \in R\}.$$

По свойству (11.4) R_0 содержит $U(R)$ и, если x, $y \in R_0$, то для любого $a \in R$

$$[(x-y)a]' = (xa - ya)' = (xa)' - (ya)' = x'a' - y'a' = \\ = (x' - y')a' = (x-y)'a',$$

т. е. $x - y \in R_0$. Далее, $(xy)' = x'y'$ и для любого $a \in R$

$$(xya)' = x'(ya)' = x'y'a' = (xy)'a',$$

откуда следует, что $xy \in R_0$. Вместе с (11.3) это показывает, что R_0 — подкольцо из R, и, поскольку оно содержит единицы кольца R, то $R_0 = R$. Значит, f: $x \mapsto x'$ — гомоморфизм. Доказательство для антигомоморфизмов аналогично.

Из вида определяющих соотношений (2.2) — (2.4) непосредственно следует

Теорема 11.2. *Пусть R — кольцо, универсальное для $\boldsymbol{GE}_2$, S — произвольное кольцо и f: $R \to S$ есть U-гомоморфизм $x \mapsto x'$. Тогда f индуцирует гомоморфизм*

$$f^*\colon \boldsymbol{GE}_2(R) \to \boldsymbol{GE}_2(S) \tag{11.6}$$

по правилу

$$E(x) \mapsto E(x'), \quad [\alpha, \beta] \mapsto [\alpha', \beta']. \tag{11.7}$$

Если g: $R \to S$ есть U-антигомоморфизм, то g индуцирует антигомоморфизм g^*, определенный таким же способом, а поэтому индуцирует гомоморфизм

$$\check{g}\colon \boldsymbol{GE}_2(R) \to \boldsymbol{GE}_2(S) \tag{11.8}$$

по правилу

$$E(x) \mapsto E(x')^{-1}, \quad [\alpha, \beta] \mapsto [\alpha', \beta']^{-1}. \tag{11.9}$$

Доказательство. Достаточно проверить, что определяющие соотношения (2.2) — (2.4) и соотношения группы $\boldsymbol{D}_2(R)$ выполняются, а это очевидно.

Если f — гомоморфизм, то действие f^* в (11.6) можно описать более простым правилом

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \tag{11.10}$$

но для произвольного U-гомоморфизма это уже не так. Хотя существует групповой гомоморфизм f^* [заданный формулами (11.7)], он не обязан совпадать с отображением (11.10), которое, вообще говоря, не будет гомоморфизмом. Подобное замечание справедливо и для U-антигомоморфизмов.

Следствие. *Любой U-гомоморфизм универсального GE_2-кольца R определяет гомоморфизм* (11.6) *группы $\boldsymbol{GL}_2(R)$, а любой его U-антигомоморфизм определяет гомоморфизм* (11.8) *группы $\boldsymbol{GL}_2(R)$.*

Если единицы кольца R (вместе с 0) образуют тело k, то U-гомоморфизм кольца R является k-бимодульным гомоморфизмом, переводящим 1 в 1. Он индуцирует мономорфизм тела k, так что U-гомоморфизм в этом случае будет просто k-полулинейным отображением. Перечислим теперь некоторые частные случаи теоремы 11.2:

1) Пусть R, S суть k-кольца, причем R — универсальное GE_2-кольцо и $U_0(R) = k$. Тогда любое k-полулинейное отображение R в S индуцирует гомоморфизм группы $\boldsymbol{GL}_2(R)$ в $\boldsymbol{GL}_2(S)$.

2) Если R есть k-кольцо со слабым алгоритмом, то любое k-полулинейное отображение R в k-кольцо S индуцирует гомоморфизм группы $\mathbf{GL}_2(R)$.

3) Любое k-линейное отображение k-кольца R со слабым алгоритмом (в себя) индуцирует эндоморфизм группы $\mathbf{GL}_2(R)$.

В случае, когда R — кольцо многочленов над полем от одной переменной, эта конструкция автоморфизмов группы $\mathbf{GL}_2(R)$ принадлежит Райнеру [5, 6].

В качестве приложения перечисленных выше результатов рассмотрим случай, когда R — свободная ассоциативная алгебра над полем k не более чем счетного ранга. Как k-бимодуль она является векторным пространством счетной размерности над k и поэтому изоморфна кольцу многочленов от одной переменной $k[x]$. Следовательно, группа $\mathbf{GL}_2$ над свободной ассоциативной алгеброй изоморфна группе $\mathbf{GL}_2(k[x])$.

Формулировка теоремы 11.2 упрощается, если в R обратимы только элементы ± 1:

Теорема 11.3. *Пусть R — кольцо, универсальное для $\mathbf{GE}_2$, в котором обратимы только элементы ± 1, S — произвольное кольцо. Тогда любой аддитивный гомоморфизм $x \mapsto x'$ из R в S, отображающий 1 в 1, индуцирует два гомоморфизма группы $\mathbf{GE}_2(R)$ в $\mathbf{GE}_2(S)$: один по правилу $E(x) \mapsto E(x')$ и другой по правилу $E(x) \mapsto E(x')^{-1}$.*

Следствие. *Пусть R — кольцо, универсальное для $\mathbf{GE}_2$, в котором обратимы только элементы ± 1. Тогда существует автоморфизм группы $\mathbf{GE}_2(R)$, отображающий $E(x)$ в $E(x)^{-1}$.*

Читатель сам сформулирует соответствующие утверждения в различных частных случаях, например для универсальных GE_2-колец. Этот результат можно применить также к дискретно упорядоченным кольцам, где условие на обратимые элементы выполняется автоматически.

§ 12. Анализ изоморфизмов общих линейных групп.

Теперь мы рассмотрим обратную задачу: когда данный изоморфизм между $\mathbf{GL}_n(R)$ и $\mathbf{GL}_n(S)$ индуцируется отображением $f\colon R \to S$? Наша цель — показать, что такое отображение f существует, если данный изоморфизм домножить на подходящий внутренний автоморфизм и центральную гомотетию, причем в качестве f можно взять некоторый (анти)-изоморфизм, а при $n=2$ U-(анти)изоморфизм. Мы ограничимся рассмотрением остепененных k-колец и предположим сначала, что $n=2$. Как и для тел, случай характеристики 2 будет изучен отдельно. С другой стороны, теперь нет необ-

ходимости ограничиваться рассмотрением GE_2-колец, наряду с ними будут рассмотрены кольца, над которыми все проективные модули свободны.

Лемма 12.1. *Пусть R—остепененное k-кольцо, где k—тело характеристики $\neq 2$, причем выполнено одно из следующих условий:*

1) *R есть GE_2-кольцо,*

2) *каждый проективный (правый) R-модуль с двумя порождающими свободен.*

Тогда любая пара антикоммутирующих инволюций из $GL_2(R)$ некоторым внутренним автоморфизмом переводится в пару $[1, -1]$, $P(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Пусть A, B — антикоммутирующие инволюции. Если выполнено условие 1), то по теореме 5.5 инволюция A сопряжена с матрицей $[1, -1]$, поскольку A нецентральна. Если же выполнено условие 2), то мы рассмотрим $E=\frac{1}{2}(I+A)$. Очевидно, E — идемпотент и, так как $A\neq\pm I$, то $E\neq 0, I$. Идемпотент E определяет разложение пространства R^2 в прямую сумму ядра и образа, которые по условию 2) являются свободными R-модулями. В базе, согласованной с этим разложением, E имеет диагональный вид $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, значит, в этой базе $A=[1, -1]$. Таким образом, при условии 1) или 2) A приводится к виду $[1, -1]$. Пусть теперь $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда $A^{-1}BA=\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$. По предположению $A^{-1}BA=-B$, поэтому $a=d=0$. Но $B^2=I$, откуда $bc=1$, т. е. $b, c\in U(R)$. Сопрягая B матрицей $[b, 1]$, перестановочной с A, получим $[c, 1]B[b, 1]=P(0)$.

Теперь пусть R — остепененное k-кольцо, S — остепененное k'-кольцо, причем k и k' — тела характеристики $\neq 2$. Предположим также, что одно из колец R, S, скажем S, либо является GE_2-кольцом, либо все проективные модули над ним свободны. Пусть

$$f\colon\ GL_2(R)\to GL_2(S) \qquad (12.1)$$

— изоморфизм. Обозначим для краткости через D_0 инволюцию $[1, -1]$ (над R или S). Над любой областью целостности $-I$ характеризуется как единственная центральная инволюция, поэтому $(-I)f=-I$. Так как D_0 и $P(0)$ — антикоммутирующие инволюции из $GL_2(R)$, то их образы отно-

сительно f — антикоммутирующие инволюции в $\boldsymbol{GL}_2(S)$. Это верно и для $\eta(D_0 f)$, $\eta(P(0)f)$, где η — одно из чисел ± 1. Сделаем для η определенный выбор, тогда, взяв композицию f с некоторым внутренним автоморфизмом группы $\boldsymbol{GL}_2(S)$, можно считать (по лемме 12.1), что

$$D_0 f = \eta D_0,\ P(0) f = \eta P(0). \tag{12.2}$$

Ввиду (12.2) централизатор матрицы D_0 в $\boldsymbol{GL}_2(R)$ отображается на централизатор D_0 в $\boldsymbol{GL}_2(S)$. Но он совпадает с множеством диагональных матриц, поэтому f отображает $\boldsymbol{D}_2(R)$ на $\boldsymbol{D}_2(S)$. Наша ближайшая задача — получить характеризацию треугольных матриц $T(h) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Полагая $T = T(h)$, $T^D = D^{-1}TD$, имеем

$$(TD_0)^2 = I, \tag{12.3}$$

$$T^D T = T T^D \text{ для всех } D \in \boldsymbol{D}_2(R). \tag{12.4}$$

Матрица $U = Tf$ удовлетворяет тем же уравнениям. Положим $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $D = [1, \delta]$. Приравнивая элементы на месте (1,1) в равенстве $U^D U = U U^D$, получим

$$b(\delta - \delta^{-1})c = 0. \tag{12.5}$$

Если тело k' содержит больше, чем 3 элемента, то существует $\delta \in k'$, такой, что $\delta \neq 0$, $\delta^2 \neq 1$. Используя (12.5), видим, что в этом случае $b = 0$ или $c = 0$. Поскольку характеристика тела k' не равна 2, то остается рассмотреть случай, когда k' — тело из трех элементов. Приравнивая коэффициенты матриц в равенстве $(UD_0)^2 = I$, вытекающем из (12.3), получим

$$ab = bd,\ ca = dc,\ a^2 - bc = d^2 - cb = 1. \tag{12.6}$$

Кроме того, в этом случае $T^3 = I$, значит, $U^3 = I$. Но

$$U^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & d^2 + cb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 - 1 & 2ab \\ 2dc & 2d^2 - 1 \end{pmatrix},$$

$$I = U^3 = \begin{pmatrix} 2a^3 - a + 2abc & * \\ * & 2d^3 - d + 2dcb \end{pmatrix},$$

откуда $a(2a^2 - 1 + 2bc) = 1$, $d(2d^2 - 1 + 2cb) = 1$. Это означает, что a, $d \in U(S) \subseteq k'$, т. е. a, $d = \pm 1$. Следовательно,

$a^2 = d^2 = 1$, и из последнего равенства в (12.6) получается, что $bc = 0$. Мы снова заключаем, что либо $b = 0$, либо $c = 0$.

Пусть $b \neq 0$, тогда $c = 0$. Из равенств (12.6), которые всегда справедливы, следует, что $a^2 = d^2 = 1$, т. е. $(a+1)(a-1) = 0$. Так как S — область целостности, то $a = \pm 1$ и аналогично $d = \pm 1$. Более того, первое равенство в (12.6) показывает, что $a = d$. Итак, U имеет вид

$$U = \pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (12.7)$$

и, очевидно, каждая такая матрица удовлетворяет условиям (12.3) и (12.4) для T. Точно так же при $b = 0$, $c \neq 0$ заключаем, что U имеет вид

$$U = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \qquad (12.8)$$

и эта матрица опять удовлетворяет условиям (12.3) и (12.4). Наконец, при $b = c = 0$ легко видеть, что $a = d = \pm 1$ и U равно $\pm I$ или $\pm D_0$. На этом все возможности для U исчерпаны.

Изоморфизм f отображает диагональные матрицы на диагональные, поэтому он отображает каждую матрицу $T(h)$ в матрицу вида (12.7) или (12.8). Рассмотрим $T(1)$. Если $T(1)f = T(s)$, $s \in S$, то $s \neq 0$, поскольку f инъективно. Так как $T(h)f$ перестановочно с $T(s) = T(1)f$ для любого $h \in R$, то $T(h)f$ имеет вид (12.7). Значит, f отображает подгруппу $\boldsymbol{B}_{12}(R) = \{B_{12}(a) \mid a \in R\}$ в подгруппу $\pm \boldsymbol{B}_{12}(S)$. Если $T(1)f = B_{21}(s)$, то возьмем композицию f с внутренним автоморфизмом, производимым элементом $E(0) = D_0 P(0)$. Новый изоморфизм f оставляет (12.2) без изменения с точностью до замены η на $-\eta$, но теперь $T(1)f = E(0)^{-1} B_{21}(s) E(0) = T(-s)$, так что этот случай по существу сводится к предыдущему. Более точно, мы показали, что композиция f с подходящим внутренним автоморфизмом удовлетворяет формулам (12.2) при $\eta = \pm 1$ и отображает $\boldsymbol{B}_{12}(R)$ в $\pm \boldsymbol{B}_{12}(S)$.

Итак, можно записать, что

$$T(x)f = \varepsilon(x)\, T(x^\sigma), \qquad (12.9)$$

где $x \mapsto x^\sigma$ — отображение R в S, а $x \mapsto \varepsilon(x)$ — отображение R в $\{\pm 1\}$. Поскольку $T(x)\,T(y) = T(x+y)$, то

$$\varepsilon(x+y)\, T\big((x+y)^\sigma\big) = \varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\, T(x^\sigma)\, T(y^\sigma) = \varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\, T(x^\sigma + y^\sigma).$$

Отсюда

$$(x+y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma, \tag{12.10}$$

$$\varepsilon(x)\,\varepsilon(y) = \varepsilon(x+y). \tag{12.11}$$

Полагая в (12.11) $y = x$, найдем, что $\varepsilon(2x) = \varepsilon(x)^2 = 1$, значит, $\varepsilon(x) = 1$ для всех $x \in R$. Уже отмечалось, что $x^\sigma \neq 0$ при $x \neq 0$, поэтому из (12.10) следует инъективность отображения σ.

Повторяя те же рассуждения для f^{-1} вместо f (и читая (12.2) справа налево), получим, что σ — изоморфизм аддитивных групп R и S. Теперь рассмотрим $E(x)$:

$$E(x) = D_0 T(x) P(0).$$

Применяя f, видим, что $E(x) f = \eta^2 D_0 T(x^\sigma) P(0)$, откуда

$$E(x) f = E(x^\sigma). \tag{12.12}$$

Если подействовать отображением f на соотношение (2.3) и с помощью (12.12) упростить результат, то получится

$$E\big((\alpha^{-1})^\sigma\big) E(\alpha^\sigma) E\big((\alpha^{-1})^\sigma\big) = -D(\alpha^{-1}) f.$$

Правая часть этого равенства принадлежит $\boldsymbol{D}_2(S)$, следовательно, такова и левая часть, но это возможно лишь при $\alpha^\sigma \in U_0(S)$. Учитывая, что $\alpha^\sigma \neq 0$, применим (2.9) и получим

$$D(\alpha^{-1}) f = -E\big((\alpha^{-1})^\sigma - (\alpha^\sigma)^{-1}\big) D(\alpha^\sigma) E\big((\alpha^{-1})^\sigma - (\alpha^\sigma)^{-1}\big).$$

Приравнивая коэффициенты на местах (1,2), получим

$$(\alpha^{-1})^\sigma = (\alpha^\sigma)^{-1}. \tag{12.13}$$

Обе части этого равенства будем обозначать через $\alpha^{-\sigma}$. Применив (12.13) к предшествующему равенству, получим $D(\alpha^{-1}) f = D\big((\alpha^\sigma)^{-1}\big)$. Заменяя α на α^{-1} и снова используя (12.13), получим

$$D(\alpha) f = D(\alpha^\sigma). \tag{12.14}$$

В частности, при $\alpha = 1$ имеем

$$1^\sigma = 1. \tag{12.15}$$

По теореме Хуа Ло-гена (см., например, [1], стр. 58—59) из (12.10), (12.13) и (12.15) следует, что σ — гомоморфизм или антигомоморфизм тела k в k'. Те же рассуждения для f^{-1} вместо f показывают, что в действительности σ — биекция между k и k', а потому изоморфизм или антиизоморфизм.

Если мы применим f к (2.4), то получим

$$D(\alpha^{-\sigma}) E(\alpha^\sigma x^\sigma \alpha^\sigma) = E(x^\sigma) D(\alpha^\sigma) = D(\alpha^{-\sigma}) E((\alpha x \alpha)^\sigma)$$

и, значит,

$$(\alpha x \alpha)^\sigma = \alpha^\sigma x^\sigma \alpha^\sigma \qquad (x \in R, \ \alpha \in U(R)). \tag{12.16}$$

В действительности это соотношение можно использовать в доказательстве теоремы Хуа Ло-гена. Более общо, с помощью этого соотношения, следуя в точности доказательству теоремы Хуа Ло-гена, можно показать, что либо

$$(\alpha x \beta)^\sigma = \alpha^\sigma x^\sigma \beta^\sigma, \tag{12.17}$$

либо

$$(\alpha x \beta)^\sigma = \beta^\sigma x^\sigma \alpha^\sigma \tag{12.18}$$

для всех $x \in R$, α, $\beta \in U(R)$. Таким образом, σ есть U-изоморфизм или U-антиизоморфизм.

Рассмотрим действие f на диагональные матрицы. Каждую такую матрицу можно привести к виду $[1, \alpha]$ умножением на матрицу $D(\beta)$ при подходящем β. Но $D(\beta) f$ определяется формулой (12.14), а образ $[1, \alpha]$ при изоморфизме f диагонален.

Пусть

$$[1, \alpha] f = [\alpha^\lambda, \alpha^\mu]. \tag{12.19}$$

Так как $P(0)[1, \alpha] P(0) = [\alpha, 1] = [\alpha, \alpha^{-1}][1, \alpha]$, то имеем $[\alpha^\sigma, \alpha^{-\sigma}][\alpha^\lambda, \alpha^\mu] = P(0)[\alpha^\lambda, \alpha^\mu] P(0) = [\alpha^\mu, \alpha^\lambda]$, откуда

$$\alpha^\mu = \alpha^\sigma \alpha^\lambda. \tag{12.20}$$

Ввиду этого равенства

$$[\alpha, \beta] f = ([\alpha, \alpha^{-1}][1, \alpha\beta]) f = [\alpha^\sigma, \alpha^{-\sigma}][(\alpha\beta)^\lambda, (\alpha\beta)^\sigma (\alpha\beta)^\lambda],$$

т. е.

$$[\alpha, \beta] f = [\alpha^\sigma, \alpha^{-\sigma}(\alpha\beta)^\sigma](\alpha\beta)^\lambda. \tag{12.21}$$

Предположим теперь, что σ есть U-изоморфизм. Тогда

$$[\alpha, \beta] f = [\alpha^\sigma, \beta^\sigma](\alpha\beta)^\lambda.$$

Отсюда и из равенства

$$[1, \alpha\beta] = [1, \alpha][1, \beta] \tag{12.22}$$

получим

$$[1, \alpha^\sigma \beta^\sigma](\alpha\beta)^\lambda = [1, \alpha^\sigma] \alpha^\lambda [1, \beta^\sigma] \beta^\lambda,$$

т. е.

$$(\alpha\beta)^\lambda = [1, \beta^{-\sigma}] \alpha^\lambda [1, \beta^\sigma] \beta^\lambda.$$

Сравнивая коэффициенты на месте (1, 1) в последнем соотношении, найдем, что

$$(\alpha\beta)^{\lambda} = \alpha^{\lambda}\beta^{\lambda},$$

а сравнивая коэффициенты на месте (2, 2) и пользуясь последним равенством, получим

$$\beta^{\sigma}\alpha^{\lambda} = \alpha^{\lambda}\beta^{\sigma}. \qquad (12.23)$$

Таким образом, λ — гомоморфизм группы $U(R)$ в $U(S)$, а поскольку σ отображает $U(R)$ на $U(S)$, то из (12.23) следует, что α^{λ} централизует $U(S)$. В силу (2.4)

$$[\beta^{\sigma}, \alpha^{\sigma}](\alpha\beta)^{\lambda} E\left((\beta^{-1}x\alpha)^{\sigma}\right) = E(x^{\sigma})[\alpha^{\sigma}, \beta^{\sigma}](\alpha\beta)^{\lambda} =$$
$$= [\beta^{\sigma}, \alpha^{\sigma}] E(\beta^{-\sigma}x^{\sigma}\alpha^{\sigma})(\alpha\beta)^{\lambda}.$$

Отсюда снова получаем, что $(\alpha x\beta)^{\sigma} = \alpha^{\sigma}x^{\sigma}\beta^{\sigma}$. Пусть $\beta = 1$, $x = y\alpha^{-1}$, тогда $\alpha^{\lambda}E(y^{\sigma}) = E(y^{\sigma})\alpha^{\lambda}$, и, следовательно, α^{λ} лежит в центре кольца S. Таким образом, λ — центральная гомотетия, а f, согласно (12.12) и (12.21), — композиция изоморфизма, индуцированного U-изоморфизмом σ, и центральной гомотетии λ. Наконец, из (12.21) и (12.2) получаем $\eta = (-1)^{\lambda}$.

Пусть теперь σ есть U-антиизоморфизм, тогда ввиду (12.21)

$$[\alpha, \beta] f = [\alpha^{\sigma}, \alpha^{-\sigma}\beta^{\sigma}\alpha^{\sigma}](\alpha\beta)^{\lambda}.$$

Если выразить λ через σ и μ с помощью (12.20), то это соотношение перепишется в виде

$$[\alpha, \beta] f = [\beta^{-\sigma}, \alpha^{-\sigma}](\alpha\beta)^{\mu}.$$

Применяя его к равенству (12.22), найдем, что μ — гомоморфизм группы $U(R)$ в центр группы $U(S)$. С помощью (2.4) доказывается, как и выше, что на самом деле α^{μ} лежит в центре S. Таким образом, f — композиция изоморфизма, индуцированного U-антиизоморфизмом σ, и центральной гомотетии μ.

Эти результаты можно суммировать в виде следующей теоремы.

Теорема 12.2.[1]. *Пусть R — остепененное k-кольцо, S — остепененное k'-кольцо, где k и k' — тела характеристики $\neq 2$. Пусть либо S есть GE_2-кольцо, либо все проективные 2-порожденные S-модули свободны. Тогда любой изоморфизм из $\boldsymbol{GL}_2(R)$ в $\boldsymbol{GL}_2(S)$ совпадает на группе $\boldsymbol{GE}_2(R)$ с композицией изомор-*

[1]) Формулировка исправлена. — *Прим. ред.*

физма, индуцированного некоторым U-изоморфизмом или U-антиизоморфизмом, центральной гомотетии и внутреннего автоморфизма.

Эта теорема включает в себя результат Райнера [6] для $R = S = k[x]$ и более ранние результаты Шрайера — ван дер Вардена и Хуа Ло-гена (см. [3] и содержащиеся там ссылки).

Если R — некоторое k-кольцо, то характеристика тела k отлична от 2 тогда и только тогда, когда $GL_2(R)$ содержит центральную инволюцию. Значит, если дан изоморфизм

$$f\colon\ GL_2(R) \cong GL_2(S),$$

где R есть k-кольцо, а S есть k'-кольцо, то характеристики k и k' равны или не равны 2 одновременно. Чтобы разобрать оставшийся случай, нам нужна лемма, аналогичная лемме 12.1. Если лемма 12.1 утверждает в характеристике 2 (и при указанных выше предположениях) сопряженность диэдральных подгрупп порядка 8 группы $GL_2(R)$, то следующая лемма утверждает в характеристике 2 сопряженность подгрупп типа симметрической группы степени 3.

Лемма 12.3. *Пусть R — остепененное k-кольцо, где k — тело характеристики 2. Предположим, далее, что R есть GE_2-кольцо. Тогда любая пара инволюций из $GL_2(R)$, произведение которых имеет порядок 3, подходящим внутренним автоморфизмом переводится в пару $T(1) (= B_{12}(1))$, $P(0)$.*

Доказательство. Пусть $A, B \in GL_2(R)$ — данные инволюции и $C = AB$. По предложению 5.4 и следующему за ним замечанию C можно привести к виду

$$[1, \beta]\, E(a) \quad \text{или} \quad [\alpha, \beta]\, E(0)\, E(b). \tag{12.24}$$

Предположим, что C имеет второй вид. Сравнивая коэффициенты матриц в обеих частях равенства $C^3 = I$, найдем, что $\alpha^3 = \beta^3 = 1$, $b\alpha^2 + \beta b\alpha + \beta^2 b = 0$. Сопрягая C матрицей $E(\beta^2 b\alpha)^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} E(\beta^2 b\alpha)\, [\alpha, \beta]\, E(0)\, E(b)\, E(0)\, E(\beta^2 b\alpha)\, E(0) = \\ = [\beta, \alpha]\, E(\beta b\alpha^2)\, E(0)\, E(b)\, E(0)\, E(\beta^2 b\alpha)\, E(0) = \\ = [\beta, \alpha]\, E(b + \beta^2 b\alpha + \beta b\alpha^2)\, E(0) = \\ = [\beta, \alpha]. \end{aligned}$$

Таким образом, C можно привести к диагональному виду. Если C имеет первый вид (12.24), то из уравнения $C^3 = I$ следует, что $\beta = a^2$, $a^3 = 1$. Если $a \neq 1$, то $a^2 + a + 1 = 0$,

и, сопрягая C матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$, получим $[\beta, 1]$. Следовательно, C приводится сопряжением к одной из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\alpha, \beta]. \tag{12.25}$$

Мы утверждаем, что на самом деле C сопряжена с первой из этих матриц. Поскольку C имеет порядок 3, то из подобия C второй матрице следовало бы, что $\alpha^3 = \beta^3 = 1$ и α, β не равны 1 одновременно. Пусть $\alpha = 1$ и $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Сравнивая коэффициенты на месте (1,1) в равенствах $A^2 = (AC)^2 = I$, видим, что $a^2 + bc = a^2 + b\beta c = 1$, откуда $b(\beta - 1)c = 0$ и b или c равно нулю. Пусть $b = 0$. Тогда $a = d = 1$, и, сравнивая коэффициенты на месте (2,2) в равенстве $(AC)^2 = I$, получим $\beta^2 = 1$, т. е. $\beta = 1$ — противоречие. Аналогичные рассуждения проходят при $c = 0$. Следовательно, ни α, ни β в (12.25) не равны 1, т. е. α, β — корни уравнения

$$x^2 + x + 1 = 0. \tag{12.26}$$

Предположим сначала, что это уравнение имеет корень ω в центре тела k. Тогда $(\alpha - \omega)(\alpha - \omega^2) = 0$, откуда $\alpha = \omega$ или $\alpha = \omega^2$. То же справедливо и для β. При $\beta = \alpha$ матрица C скалярна, оставим этот случай на время в стороне и, не прерывая рассуждений, будем считать, что $\beta \neq \alpha$. Тогда $\beta = \alpha^{-1}$ и, сопрягая C матрицей $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, получим для C первый вид из (12.25). Если уравнение (12.26) не имеет корней в центре Z тела k, то оно неразложимо над Z и, значит, все его корни в k сопряжены [4]. Поэтому существует элемент $\gamma \in k$, такой, что $\gamma^{-1}\beta\gamma = \alpha^{-1}$. Сопрягая $[\alpha, \beta]$ матрицей $[1, \gamma]$, мы сведем этот случай к предыдущему.

Итак, C можно привести к виду $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (с отмеченным выше исключением). По предположению $C = AB$, $C^{-1} = BA$, откуда

$$CB = A = BC^{-1}. \tag{12.27}$$

Полагая $B = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$ и используя выражение, найденное для C, сравним коэффициенты в (12.27). После упрощения получим

$$z = u, \quad u + v + w = 0.$$

Сравнив коэффициенты матриц в равенстве $B^2 = I$, найдем, что $uv = vu$, $u^2 + vw = 1$. Кроме того, $A = \begin{pmatrix} v & w \\ u & v \end{pmatrix}$. По теореме 5.5 матрица A подобна $T(h)$ при подходящем $h \in R$, т. е. существует обратимая матрица $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, такая, что

$$AP = PT(h). \tag{12.28}$$

Снова сравнивая коэффициенты, получаем

$$va + wc = a, \quad vb + wd = ah + b,$$
$$ua + vc = c, \quad ub + vd = bh + d,$$

или, после упрощения,

$$\begin{aligned} (v+1)a &= wc, & (v+1)b + wd &= ah, \\ ua &= (v+1)c, & ub + (v+1)d &= bh. \end{aligned} \tag{12.29}$$

Перепишем (12.28) в виде

$$(A + I)P = P\begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для первых строк этого матричного уравнения имеем

$$(v + 1,\ w)P = (0,\ ah), \tag{12.30}$$

значит,

$$(v + 1,\ w) = (0,\ ah)P^{-1}. \tag{12.31}$$

Из первых двух равенств (12.29) следует, что

$$(v + 1)c + w(a + c) = a, \tag{12.32}$$

а из (12.31) получается, что ah — общий левый делитель для $v + 1$ и w. Поэтому $a = ahk$, и h — единица, скажем, $h = \eta$. Комбинируя (12.32) и третье равенство из (12.29), получим

$$(v + 1,\ w)\begin{pmatrix} b + c\eta \\ d + (a + c)\eta \end{pmatrix} = 0.$$

Используя (12.30), перепишем это в виде

$$(0,\ a\eta)P^{-1}\begin{pmatrix} b + c\eta \\ d + (a + c)\eta \end{pmatrix} = 0.$$

Если $a=0$, то $c\neq 0$, и первые два равенства из (12.29) показывают, что $w=0$, $v=1$, а тогда $u=1$. В этом случае сопряжение с помощью C^{-1} приводит к требуемому виду. Если $a\neq 0$, то $a\eta\neq 0$, и из последнего равенства следует, что

$$P^{-1}\begin{pmatrix} b+c\eta \\ d+(a+c)\eta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{для некоторого} \quad k\in R.$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} b+c\eta \\ d+(a+c)\eta \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $b=c\eta+ak$, $d=(a+c)\eta+ck$. Подставим эти значения в P:

$$P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & ak+c\eta \\ c & ck+(a+c)\eta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c \\ c & a+c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & \eta \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что матрица $P_1=\begin{pmatrix} a & c \\ c & a+c \end{pmatrix}$ обратима. Ясно, что P_1 перестановочна с $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и, сопрягая A с помощью P_1, мы получим $T(1)$. То же самое сопряжение приводит матрицу $B=AC$ к виду $P(0)$, что мы и хотели показать.

Осталось лишь заметить, что случай $C=\omega I$, где ω — корень уравнения (12.26) из центра тела k, невозможен. Предположим противное и введем обозначения

$$R^{+}=\{x\in R\mid x\omega=\omega x\},\quad R^{-}=\{x\in R\mid x\omega=\omega^{2}x\}.$$

Для краткости элементы из R^{+} будем называть *симметричными*, а элементы из R^{-} — *кососимметричными*. По предположению каждый элемент из k симметричен. Покажем, что каждый элемент из R выражается в виде суммы симметричного и кососимметричного элементов, причем единственным образом. В самом деле, если

$$x=x^{+}+x^{-},\quad x^{\varepsilon}\in R^{\varepsilon},\ \varepsilon=\pm, \tag{12.33}$$

то

$$\omega x=x^{+}\omega+x^{-}\omega^{2}. \tag{12.34}$$

Решая эти два уравнения, найдем, что

$$x^{+}=x\omega^{2}+\omega x,\quad x^{-}=x\omega+\omega x.$$

Итак, для x^+ и x^- возможен единственный выбор, и ясно, что он удовлетворяет (12.33). Из равенств (12.27) имеем

$$\omega B = B\omega^2,$$

поэтому все элементы в B кососимметричны. Матрица B обратима, поэтому имеет вид

$$[\alpha, \beta] E(q_1) \dots E(q_r).$$

Обозначая первую строку матрицы B через (a, b) и используя лемму 5.1, получим

$$a = bq_r + a', \tag{12.35}$$

где $d(a') < d(b)$. Сравним здесь симметричные компоненты:

$$b(q_r)^- + (a')^+ = 0.$$

Но $d((a')^+) \leqslant d(a') < d(b)$, значит, $(a')^+ = (q_r)^- = 0$, т. е. a' кососимметричен, а q_r симметричен. Следовательно, элементы матрицы $BE(q_r)^{-1}$ кососимметричны. Используя индукцию по r, заключаем, что $[\alpha, \beta]$ состоит из кососимметричных элементов, но это противоречит включению $k \subseteq R^+$. Тем самым лемма 12.3 полностью доказана.

С помощью этой леммы легко получить в характеристике 2 теорему, подобную теореме 12.2. Пусть

$$f\colon \boldsymbol{GL}_2(R) \to \boldsymbol{GL}_2(S)$$

— изоморфизм, причем R — остепененное k-кольцо, S — остепененное k'-кольцо, k и k' — тела характеристики 2, а S есть GE_2-кольцо. В группе $\boldsymbol{GL}_2(R)$ матрицы $T(1)$, $P(0)$ образуют пару инволюций, произведение которых имеет порядок 3, следовательно, таковы и их образы в $\boldsymbol{GL}_2(S)$. По лемме 12.3 можно считать (домножив f на подходящий внутренний автоморфизм группы $\boldsymbol{GL}_2(S)$), что

$$T(1)f = T(1), \qquad P(0)f = P(0). \tag{12.36}$$

Подгруппа $\boldsymbol{B}_{12}(R)$ из $\boldsymbol{GL}_2(R)$ может быть охарактеризована как максимальная абелева подгруппа периода 2 из централизатора матрицы $T(1)$ в $\boldsymbol{GL}_2(R)$[1]. Поэтому она отображается

---

[1]) А также как множество всех инволюций из централизатора матрицы $T(1)$ с добавленной к ним единичной матрицей.

на $\boldsymbol{B}_{12}(S)$ — максимальную абелеву подгруппу периода 2 из централизатора $T(1)$ в $\boldsymbol{GL}_2(S)$. Таким образом, существует отображение σ: $R \to S$, такое, что

$$T(x) f = T(x^\sigma), \qquad x \in R.$$

Из соотношения (2.2) имеем

$$(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma, \tag{12.37}$$

а ввиду (12.36)

$$1^\sigma = 1. \tag{12.38}$$

Диагональная матрица D из $\boldsymbol{GL}_2(R)$ характеризуется тем, что D и $P(0)DP(0)$ нормализуют $\boldsymbol{B}_{12}(R)$. Следовательно, f отображает диагональные матрицы над R в диагональные матрицы над S. Далее можно в точности повторить рассуждения из доказательства теоремы 12.2 и заключить, что справедлива

Теорема 12.4. *Пусть R—остепененное k-кольцо, S—остепененное k'-кольцо, k и k' — тела характеристики 2, а S есть GE_2-кольцо. Тогда каждый изоморфизм между $\boldsymbol{GL}_2(R)$ и $\boldsymbol{GL}_2(S)$ является композицией изоморфизма, индуцированного U-изоморфизмом или U-антиизоморфизмом, центральной гомотетии и внутреннего автоморфизма.*

В заключение мы коротко обсудим изоморфизмы группы $\boldsymbol{GL}_n(R)$. Оказывается, что методом, подобным использованному при доказательстве теоремы 12.2, получается

Теорема 12.5. *Пусть R—остепененное k-кольцо, S—остепененное k'-кольцо, k и k' — тела характеристики $\neq 2$. Предположим также, что любой конечно порожденный проективный S-модуль свободен. Тогда каждый изоморфизм между $\boldsymbol{GL}_n(R)$ и $\boldsymbol{GL}_n(S)$ при $n \geqslant 3$ является композицией изоморфизма, индуцированного некоторым изоморфизмом или антиизоморфизмом из R в S, центральной гомотетии и внутреннего автоморфизма.*

Доказательство. Группа $\boldsymbol{GL}_n(R)$ содержит систему J из 2^n перестановочных инволюций $[\pm 1, \ldots, \pm 1]$, причем симметрическая группа Σ степени n естественно действует на J. Каждая орбита относительно этого действия состоит из $\binom{n}{k}$ элементов, где $k = 0, 1, \ldots, n$. Всего имеется $n+1$ орбит. Изоморфизм f переводит J в множество из 2^n перестановочных инволюций, лежащих в $\boldsymbol{GL}_n(S)$. Если P — инво-

люция, то $E = \frac{1}{2}(I+P)$ — идемпотент, и мы получаем 2^n перестановочных идемпотентов в матричном кольце S_n. Поскольку по условию проективные S-модули свободны, то каждый идемпотент диагонализируем, а множество перестановочных идемпотентов можно одновременно привести к диагональному виду с элементами 0, 1 на диагонали. Подходящим сопряжением приведем 2^n перестановочных идемпотентов к виду $E = [e_1, \ldots, e_n]$, где $e_i = 0$ или 1. Но $P = 2E - I$ — снова инволюция, так что мы имеем в $GL_n(S)$ систему из 2^n перестановочных инволюций диагонального вида. Более точно, применяя подходящий внутренний автоморфизм, можно считать, что для любой инволюции $P = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]$, $\varepsilon_i = \pm 1$, матрица Pf диагональна, причем на диагонали стоят элементы ± 1. Если r — число тех ε_i, которые равны $+1$, то назовем P *инволюцией типа* $(r, n-r)$, или, короче, $(r, n-r)$*-инволюцией*. Подгруппа группы Σ, централизующая $(r, n-r)$-инволюцию, имеет вид $\Sigma_r \times \Sigma_{n-r}$, поэтому, если P имеет тип $(r, n-r)$, то Pf будет типа $(r, n-r)$ или $(n-r, r)$, т. е. Pf или $-Pf$ имеет тип $(r, n-r)$. Инволюции $P_1, \ldots, P_n$ типа $(1, n-1)$ составляют одну орбиту относительно Σ, значит, $P_1 f, \ldots, P_n f$ сопряжены и, следовательно, все имеют тип $(1, n-1)$ или $(n-1, 1)$. Домножив f на подходящий внутренний автоморфизм, можно считать, что

$$P_i f = \eta P_i, \tag{12.39}$$

где $\eta = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$. Так как любая инволюция P из J есть произведение инволюций P_i, то $Pf = \eta_P P$, где $\eta_P = \eta^r$, если P имеет тип $(r, n-r)$. Пусть S_σ — подстановочная матрица, соответствующая подстановке $\sigma \in \Sigma$. Тогда $S_\sigma^{-1} P_i S_\sigma = P_{i\sigma}$. Применяя f, получим, согласно (12.39), что $(S_\sigma f)^{-1} P_i (S_\sigma f) = P_{i\sigma}$. Следовательно, матрица $S_\sigma (S_\sigma f)^{-1}$ перестановочна с $P_1, \ldots, P_n$, а потому диагональна и

$$S_\sigma f = D_\sigma S_\sigma. \tag{12.40}$$

Пусть $\rho = (1\ 2 \ldots n)$ — цикл длины n, $D_\rho = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Из равенства $S_\rho^n = I$ следует, что

$$\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 = 1. \tag{12.41}$$

Если сопрячь образы относительно f одной и той же диагональной матрицей $T = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$, то матрицы из J не изменятся, а (12.40) примет вид

$$S_\sigma f = D'_\sigma S_\sigma, \quad \text{где} \quad D'_\sigma = T^{-1} D_\sigma S_\sigma T S_\sigma^{-1}.$$

В частности,

$$D'_\rho = [\gamma_1^{-1}\alpha_1\gamma_n,\ \gamma_2^{-1}\alpha_2\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_n^{-1}\alpha_n\gamma_{n-1}].$$

Наша цель — выбрать $\zeta = \pm 1$ и γ_i ($i = 1, \ldots, n$) так, чтобы было

$$\gamma_i^{-1}\alpha_i\gamma_{i-1} = \zeta, \tag{12.42}$$

где $i = 1, \ldots, n$ и $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$. Если это сделано, то в силу (12.41) будем иметь

$$\gamma_1 = \alpha_1\zeta, \quad \gamma_2 = \alpha_2\gamma_1\zeta = \alpha_2\alpha_1\zeta^2, \ \ldots$$
$$\ldots,\ \gamma_{n-1} = \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1\zeta^{n-1}, \quad \gamma_n = \zeta^n = 1.$$

Обратно, если выполнены последние равенства, то справедливы и равенства (12.42). Но последние уравнения всегда разрешимы при четном n, а если n нечетно, то они разрешимы при условии, что $\zeta = 1$. Применяя подходящий внутренний автоморфизм (индуцированный диагональной матрицей), можно считать, что для $\rho = (1\ 2\ \ldots\ n)$ равенство (12.40) имеет вид

$$S_\rho f = \chi(\rho) S_\rho, \tag{12.43}$$

где χ — линейный характер группы Σ.

Пусть $\tau = (1\ 2)$ — транспозиция, $D_\tau = [\beta_1, \ldots, \beta_n]$. Из соотношения $S_\tau^2 = I$ следует, что $\beta_1\beta_2 = 1$, $\beta_i^2 = 1$ ($i \geqslant 3$). Диагонализируя S_τ, легко убедиться, что S_τ — инволюция типа $(1, n-1)$, а $S_\tau f$ имеет тип $(1, n-1)$ или $(n-1, 1)$. Отсюда следует, что $\beta_3 = \beta_4 = \ldots = \beta_n$ ($= \pm 1$). Таким образом,

$$D_\tau = [\beta,\ \beta^{-1},\ \delta,\ \ldots,\ \delta], \qquad \delta = \pm 1.$$

Теперь равенство $(1\ 2 \ldots n) = (n\ n-1)(n-1\ n-2) \ldots (3\ 2)(2\ 1)$ показывает, что

$$S_\rho = S_\tau^{\rho^{n-2}} S_\tau^{\rho^{n-3}} \ldots S_\tau,$$

где S^ρ обозначает матрицу, сопряженную с S с помощью S_ρ. Применяя f и сравнивая диагональные члены, получим

$$\beta\delta^{n-2} = \chi(\rho), \quad \beta^{n-1} = \chi(\rho). \tag{12.44}$$

При n нечетном $\chi(\rho) = 1$, и все сводится к равенству

$$\beta = \delta.$$

Следовательно, в этом случае $D_\tau = \delta I$ — скалярная матрица, а поскольку ρ и τ порождают группу Σ, то каждая матрица D_σ

скалярна, точнее,

$$S_\sigma f = \chi(\sigma) S_\sigma, \tag{12.45}$$

где χ — линейный характер группы Σ, единичный или знакопеременный в соответствии с равенством $\delta = 1$ или $\delta = -1$. Если же n четно, то равенства (12.44) принимают вид

$$\beta = \chi(\rho) \ (= \chi(\tau)),$$

и выбор ζ находится в нашем распоряжении. Возьмем $\zeta = \chi(\rho)$, тогда матрица D_τ снова будет скалярна и равенство (12.45) снова будет справедливо.

Диагональные матрицы можно охарактеризовать тем, что они централизуют $P_1, \ldots, P_n$. Рассмотрим теперь централизатор множества

$$[1,\ 1,\ \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n], \qquad \varepsilon_i = \pm 1. \tag{12.46}$$

Ясно, что это будут в точности матрицы вида $A \oplus [d_3, \ldots, d_n]$, где $A \in \boldsymbol{GL}_2(R)$, поэтому централизатор множества (12.46) и всех подстановок, действующих на 1 и 2 тождественно, состоит из матриц вида $A \oplus \lambda I_{n-2}$ ($\lambda \in k$). Таким образом, f индуцирует отображение $A \oplus I_{n-2} \mapsto A\bar{f} \oplus \lambda(A) I_{n-2}$, где $\bar{f}$ — изоморфизм $\boldsymbol{GL}_2(R) \mapsto \boldsymbol{GL}_2(S)$. Сопрягая обе части матрицей S_σ, $\sigma \in \Sigma$, видим, что аналогичная формула справедлива и для других строк и столбцов. По теореме 12.2 изоморфизм f имеет вид $f_1 f_2 f_3$, где f_1 индуцирован U-изоморфизмом или U-антиизоморфизмом φ, f_2 — центральная гомотетия, f_3 — внутренний автоморфизм. Пусть φ есть U-изоморфизм. Поскольку f_1 отображает $B_{ij}(x)$ в $B_{ij}(x^\varphi)$ и $(B_{12}(x), B_{23}(y)) = B_{13}(xy)$, где $(A, B) = A^{-1}B^{-1}AB$, то $(B_{12}(x^\varphi), B_{23}(y^\varphi)) = B_{13}((xy)^\varphi)$, т. е. $(xy)^\varphi = x^\varphi y^\varphi$. Значит, φ — на самом деле обычный изоморфизм. Аналогично доказывается, что φ будет обычным антиизоморфизмом, если φ есть U-антиизоморфизм. Беря коммутаторы элементов $A\bar{f} \oplus \lambda(A) I_{n-2}$ с элементами вида $I_2 \oplus B$, легко убедиться, что $\lambda(A)$ лежит в центре S. Разделив на $\lambda(A)$, получим гомоморфизм

$$A \oplus I_{n-2} \mapsto \theta(A) A^\varphi \oplus I_{n-2},$$

причем по определению $\theta(A) = I$, если A—инволюция. Так как

$$[\alpha,\ 1,\ 1, \ldots, 1] \mapsto [\theta(\alpha)\alpha^\varphi,\ \theta(\alpha),\ 1, \ldots, 1],$$

то, переставляя вторую и третью строки и аналогичные столбцы (это не меняет левой части), получаем $\theta([\alpha,\ 1]) = 1$. Следовательно, $\theta = 1$, и все доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Artin, Geometric algebra, Interscience Publishers, New York — London, 1957. [Русский перевод: Э. Артин, Геометрическая алгебра, «Наука», М., 1969.]

2. P. M. Cohn, Rings with a weak algorithm, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **109** (1963), 332—356.

3. J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, Berlin, 1955. [Русский перевод: Ж. Дьёдонне, Геометрия классических групп, «Мир», М., 1974.]

4. I. N. Herstein, An elementary proof of a theorem of Jacobson, *Duke Math. J.*, **21**, № 1 (1954), 45—48.

5. I. Reiner, A theorem on continued fractions, *Proc. Amer. Soc.*, **8**, № 6 (1957), 1111—1113.

6. I. Reiner, A new type of automorphism of the general linear group over a ring, *Ann. Math.*, **66**, № 3 (1957), 461—466.

ЛЕКЦИИ О ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ[1])

О. О'Мира

Цель этих лекций — изложить теорию изоморфизмов линейных групп[2]) над областями целостности. Вот ее типичный результат:

$$\boldsymbol{PSL}_n(\mathfrak{o}) \simeq \boldsymbol{PSL}_{n_1}(\mathfrak{o}_1) \Leftrightarrow n = n_1, \quad \mathfrak{o} \simeq \mathfrak{o}_1$$

в размерностях $\geqslant 3$. Излагаемая ниже теория отражает существенную часть многочисленных исследований последнего десятилетия, посвященных изоморфизмам классических групп над кольцами. Мы предполагаем известными лишь основные сведения из начального курса алгебры. В частности, здесь будет доказана — даже двумя способами — классическая теорема о простоте групп $\boldsymbol{PSL}_n(F)$ и будут изложены все необходимые сведения из проективной геометрии. При подготовке лекций я обнаружил возможность распространить известную теорию с групп линейных преобразований на группы полулинейных преобразований, а также с размерностей $\geqslant 5$ на размерности $\geqslant 3$, эти новые результаты включены в изложение.

Настоящие заметки возникли из курса лекций в Калифорнийском технологическом институте (весна 1968 г.), десяти обзорных лекций о классических группах и группах Шевалле в университете штата Аризона (март 1973 г.) и лекций о линейных группах в Нотр-Дамском университете (осень 1973 г.).

Я рад выразить свою признательность Ольге Тausской и Гансу Цассенхаузу, которые много лет назад познакомили

---

[1]) O. T. O'Meara, Lectures on linear groups, Providence, Rhode Island, 1974.

[2]) Под линейными группами в этих лекциях и некоторых других работах понимаются не произвольные группы матриц, как это чаще принято, а только общая линейная и специальная линейная группы и их проективные образы, т. е. первое из четырех семейств классических групп. — *Прим. ред.*

меня с линейными группами, У. Уонгу, К. Риму и А. Хану за многочисленные обсуждения, а также Р. Якобовичу за полезную беседу.

Обозначения

Предполагается, что читателю известны основные сведения о множествах, группах, полях и векторных пространствах.

Пусть X и Y — множества. Мы будем использовать следующие обозначения:

$\operatorname{pow} X$ — множество всех подмножеств из X,
$X \subset Y$ — строгое включение,
$X - Y$ — разность множеств,
$X \to Y$ — отображение X в Y,
$X \twoheadrightarrow Y$ — отображение X на Y,
$X \rightarrowtail Y$ — взаимно однозначное отображение X в Y,
$X \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrowtail Y$ — взаимно однозначное отображение X на Y.

Если f: $X \to Y$—отображение и Z—подмножество множества X, т. е. элемент из $\operatorname{pow} X$, то fZ будет обозначать подмножество $\{fz \mid z \in Z\}$ множества Y. Отображение f: $X \to Y$ индуцирует отображение f: $\operatorname{pow} X \to \operatorname{pow} Y$, переводящее Z в fZ для всех Z из $\operatorname{pow} X$; если исходное отображение является отображением *на* или взаимно однозначно, то таким же будет и индуцированное отображение.

Под натуральными числами понимаются числа 1, 2, 3, ...

Если X — произвольная аддитивная группа, в частности аддитивная группа поля или векторного пространства, то $\dot{X}$ будет обозначать множество ее ненулевых элементов; если X — поле, то $\dot{X}$ — его мультипликативная группа. Будем употреблять символ $\mathbb{F}_q$ для обозначения конечного поля из q элементов. Если X — произвольная мультипликативная группа и Y — ее непустое подмножество, то $\langle Y \rangle$ будет обозначать подгруппу, порожденную множеством Y, $\operatorname{cen} X$ — центр группы X, $[p, q]$ — коммутатор $pqp^{-1}q^{-1}$ элементов p и q из X, DX — коммутант группы X. Запись $Y \lhd X$ будет обозначать, что Y — нормальная подгруппа в X. Под *прямой*, *плоскостью* и *гиперплоскостью* в n-мерном векторном пространстве понимаются подпространства размерности 1, 2 и $n-1$ соответственно. Символ V' обозначает пространство, сопряженное с V, S^0 — аннулятор в V' подмножества S из V, T^0 — аннулятор в V подмножества T из V'. Для любого $a \in \dot{V}$ символ $\langle a \rangle$ обозначает прямую Fa.

Буква V всюду в дальнейшем обозначает n-мерное векторное пространство над полем F, а V_1 обозначает n_1-мерное векторное пространство над полем F_1, причем $1 \leqslant n,\ n_1 < \infty$.

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. Геометрические, линейные и проективные преобразования

Взаимно однозначное отображение $g\colon V \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow V_1$ называется *геометрическим преобразованием* пространства V на пространство V_1, если оно отображает подпространства из V на подпространства из V_1 и наоборот.

Ясно, что множество геометрических преобразований замкнуто относительно композиции и обращения. Геометрические преобразования сохраняют включение, пересечение и объединение подпространств, ряды Жордана—Гёльдера. В частности,

1.1.1. *Если $g\colon V \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow V_1$ — геометрическое преобразование, то*

$$g(U \cap W) = gU \cap gW, \quad g(U + W) = gU + gW,$$
$$\dim_{F_1} gU = \dim_F U,$$
$$g0 = 0, \quad gV = V_1$$

для любых подпространств U и W пространства V.

Под *проективным пространством* $P(V)$ пространства V будем понимать множество всех подпространств пространства V. Таким образом, $P(V)$ состоит из тех элементов множества $\operatorname{pow} V$, которые являются подпространствами. Множество $P(V)$ частично упорядочено относительно теоретико-множественного включения. Оно является решеткой, так как вместе с любыми двумя элементами U и W содержит их пересечение и объединение, т. е. подпространства $U + W$ и $U \cap W$. Эта решетка содержит наибольший элемент V и наименьший элемент 0. Наконец, каждый ее элемент U имеет ряд Жордана — Гёльдера $0 \subset \ldots \subset U$ длины $\dim_F U + 1$. Положим

$$P^i(V) = \{U \in P(V) \mid \dim_F U = i\}$$

и будем называть элементы из $P^1(V)$, $P^2(V)$ и $P^{n-1}(V)$ прямыми, плоскостями и гиперплоскостями соответственно.

Взаимно однозначное отображение $\pi\colon P(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow P(V_1)$ называется *проективностью* пространства V на пространство V_1, если для любых U и W из $P(V)$ включение $U \subseteq W$ имеет место тогда и только тогда, когда $\pi U \subseteq \pi W$.

Ясно, что композиция проективностей есть проективность и преобразование, обратное к проективности, — также проективность. Проективность пространства V на пространство V_1 сохраняет упорядочение, объединение, пересечение, ряды Жордана — Гёльдера:

1.1.2. *Если* π: $P(V) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow P(V_1)$*—проективность, то*

$$\pi(U \cap W) = \pi U \cap \pi W, \quad \pi(U + W) = \pi U + \pi W,$$
$$\dim_{F_1} \pi U = \dim_F U,$$
$$\pi 0 = 0, \quad \pi V = V_1$$

для любых элементов U *и* W *из* $P(V)$. *В частности,* π *отображает* $P^1(V)$ *на* $P^1(V_1)$ *и определяется значениями на* $P^1(V)$, *т. е. на прямых.*

Если g: $V \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow V_1$ — геометрическое преобразование, то отображение $\bar{g}$: $P(V) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow P(V_1)$, полученное из g: $\operatorname{pow} V \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \operatorname{pow} V_1$ сужением, будет проективностью пространства V на пространство V_1. *Проективным геометрическим преобразованием* пространства V на пространство V_1 назовем проективность π: $P(V) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow P(V_1)$ вида $\pi = \bar{g}$ для некоторого геометрического преобразования g. Черта над буквой всегда будет применяться для обозначения проективного геометрического преобразования $\bar{g}$, полученного из геометрического преобразования g по правилу, указанному выше. Итак, $\bar{g}$ отображает подпространство U пространства V, т. е. элемент из $P(V)$, на подпространство gU пространства V_1. Очевидно,

$$\overline{g_1 \ldots g_t} = \bar{g}_1 \ldots \bar{g}_t$$

и

$$\bar{g}^{-1} = \overline{g^{-1}}.$$

В частности, множество проективных геометрических преобразований замкнуто относительно композиции и обращения.

Геометрическое преобразование пространства V на себя назовем геометрическим преобразованием пространства V. Множество геометрических преобразований пространства V является подгруппой группы подстановок множества V. Ее будем обозначать символом $\boldsymbol{\Xi L}_n(V)$ и называть общей геометрической группой пространства V. Под группой геометрических преобразований пространства V мы понимаем любую подгруппу группы $\boldsymbol{\Xi L}_n(V)$. Таким образом, общая линейная группа $\boldsymbol{GL}_n(V)$, состоящая из всех обратимых линейных преобразований пространства V, и специальная линейная группа

$$\boldsymbol{SL}_n(V) = \{\sigma \in \boldsymbol{GL}_n(V) \mid \det \sigma = 1\}$$

являются группами геометрических преобразований. Под группой линейных преобразований мы понимаем любую подгруппу группы $\boldsymbol{GL}_n(V)$. Из рассмотрения гомоморфизма det получаем изоморфизм

$$\boldsymbol{GL}_n(V)/\boldsymbol{SL}_n(V) \simeq \dot{F}.$$

Проективность пространства V на себя назовем проективностью пространства V. Множество проективностей пространства V является подгруппой группы подстановок множества $P(V)$, которую будем называть *группой проективностей* пространства V. Отображение

$$^{-}: \Xi L_n(V) \to \text{группа проективностей пространства } V$$

является гомоморфизмом. Иногда мы будем использовать P вместо $^{-}$, полагая

$$PX = \overline{X}$$

для образа $\overline{X}$ подмножества X из $\Xi L_n(V)$ при P. В частности,

$$\boldsymbol{PGL}_n(V) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{PSL}_n(V)\,[1]$$

— подгруппы группы проективностей пространства V, называемые *проективной общей линейной группой* и *проективной специальной линейной группой* пространства V. Позднее мы докажем, что $\boldsymbol{P\Xi L}_n(V)$ $(n \geqslant 1)$ совпадает с группой всех проективностей пространства V, после чего получим право использовать этот символ для обеих групп. Под группой проективностей пространства V мы понимаем любую подгруппу группы всех его проективностей, а под проективной группой линейных преобразований — любую подгруппу группы $\boldsymbol{PGL}_n(V)$.

§ 1.2. Растяжения

Для любого ненулевого элемента α из F определим линейное преобразование r_α по правилу

$$r_\alpha x = \alpha x, \quad x \in V.$$

Ясно, что r_α — элемент группы $\boldsymbol{GL}_n(V)$. Произвольное σ из $\boldsymbol{GL}_n(V)$ вида $\sigma = r_\alpha$ для некоторого α будем называть *растяжением* пространства V. Множество растяжений $\boldsymbol{RL}_n(V)$ пространства V является нормальной подгруппой в $\boldsymbol{GL}_n(V)$. Очевидно, $\boldsymbol{RL}_n \simeq \dot{F}$.

1.2.1. *Элемент σ из $\boldsymbol{GL}_n(V)$ тогда и только тогда является растяжением, когда $\sigma L = L$ для всех прямых L из V. В частности,*

$$\ker\left(P\,|_{\boldsymbol{GL}_n}\right) = \boldsymbol{RL}_n, \quad \ker\left(P\,|_{\boldsymbol{SL}_n}\right) = \boldsymbol{SL}_n \cap \boldsymbol{RL}_n$$

и

$$\boldsymbol{PGL}_n \simeq \boldsymbol{GL}_n/\boldsymbol{RL}_n, \quad \boldsymbol{PSL}_n \simeq \boldsymbol{SL}_n/\boldsymbol{SL}_n \cap \boldsymbol{RL}_n.$$

---

[1] Перед обозначениями групп, набранными жирным шрифтом, для оператора $\boldsymbol{P}$ также используется жирный шрифт. — *Прим. ред.*

Доказательство. Зафиксируем z из $\dot{V}$. Существует β из $\dot{F}$, для которого $\sigma z = \beta z$. Нужно доказать, что $\sigma x = \beta x$ для произвольного x из $\dot{V}$. По предположению $\sigma x = \alpha x$ для некоторого α из $\dot{F}$. Если $x \in Fz$, то x имеет вид λz, поэтому

$$\sigma x = \sigma(\lambda z) = \lambda(\sigma z) = \lambda\beta z = \beta x.$$

Если $x \notin Fz$, то

$$\alpha x + \beta z = \sigma(x+z) = \gamma(x+z),$$

поэтому, в силу независимости x и z, $\alpha = \gamma = \beta$, что и требовалось доказать.

1.2.2. *Подгруппа* $\boldsymbol{PSL}_n(V)$ *нормальна в* $\boldsymbol{PGL}_n(V)$ *и* $\boldsymbol{PGL}_n/\boldsymbol{PSL}_n \simeq \dot{F}/\dot{F}^n$.

Доказательство. Нормальность очевидна. Далее, ядром композиции гомоморфизмов

$$\boldsymbol{GL}_n \underset{P}{\twoheadrightarrow} \boldsymbol{PGL}_n \underset{\text{кан}}{\twoheadrightarrow} \boldsymbol{PGL}_n/\boldsymbol{PSL}_n$$

является группа

$$G = \{\sigma \in \boldsymbol{GL}_n \mid \det \sigma \in \dot{F}^n\}.$$

С другой стороны, ядром композиции гомоморфизмов

$$\boldsymbol{GL}_n \underset{\det}{\twoheadrightarrow} \dot{F} \underset{\text{кан}}{\twoheadrightarrow} \dot{F}/\dot{F}^n$$

является также G. Значит,

$$\boldsymbol{PGL}_n/\boldsymbol{PSL}_n \simeq \boldsymbol{GL}_n/G \simeq \dot{F}/\dot{F}^n.$$

Предложение доказано.

§ 1.3. Вычеты

Для произвольного σ из $\boldsymbol{GL}_n(V)$ определим *вычетное пространство* R, *неподвижное пространство* P и *вычет* $\operatorname{res}\sigma$ следующими равенствами:

$$R = (\sigma - 1_V)V, \quad P = \ker(\sigma - 1_V),$$
$$\operatorname{res}\sigma = \dim R.$$

Подпространства R и P называются пространствами преобразования σ. Очевидно,

$$\dim R + \dim P = n,$$
$$\sigma R = R, \quad \sigma P = P,$$
$$\operatorname{res}\sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma = 1_V.$$

Ясно, что σ и σ^{-1} имеют одинаковые R, P, res и

$$P = \{x \in V \mid \sigma x = x\}.$$

Если $R \cap P = 0$, то $V = R \oplus P$ и R характеризует отклонение σ от тождественного преобразования. Однако в дальнейшем нам встретятся примеры, когда $R \cap P \neq 0$ и даже $R \subseteq P$. Если R — прямая (плоскость, гиперплоскость), то мы будем называть ее вычетной прямой (плоскостью, гиперплоскостью) преобразования σ. Аналогичный смысл имеют понятия неподвижной прямой, плоскости и т. д.

Соглашение. Всякий раз, когда рассматривается преобразование σ из $\boldsymbol{GL}_n(V)$, буква R будет обозначать вычетное, а P — неподвижное пространство этого σ. Аналогично R_i и P_i будут ассоциироваться с σ_i.

1.3.1. *Пусть* σ_1, σ_2 — *элементы из* $\boldsymbol{GL}_n(V)$ *и* $\sigma = \sigma_1\sigma_2$. *Тогда*

$$R \subseteq R_1 + R_2, \quad P \supseteq P_1 \cap P_2,$$
$$\operatorname{res} \sigma_1\sigma_2 \leqslant \operatorname{res} \sigma_1 + \operatorname{res} \sigma_2.$$

1.3.2. Примеры. Вычетное пространство нетривиального растяжения пространства V совпадает с самим пространством V. Если взять прямую сумму $V = U \oplus W$ и положить $\sigma_1 = (1_U) \oplus (\alpha 1_W)$, где $\alpha \neq 0$, 1, то, как легко видеть, $R_1 = W$, $P_1 = U$. Полагая $\sigma_2 = (\alpha 1_U) \oplus (1_W)$, получаем пример равенства во всех соотношениях 1.3.1. С другой стороны, если σ — произвольный элемент из $\boldsymbol{GL}_n(V)$, отличный от тождественного преобразования, то, положив $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma^{-1}$, получим строгие неравенства во всех соотношениях 1.3.1.

1.3.3. *Пусть* σ_1, σ_2 — *элементы из* $\boldsymbol{GL}_n(V)$ *и* $\sigma = \sigma_1\sigma_2$. *Тогда*

1) $V = P_1 + P_2 \Rightarrow R = R_1 + R_2$,

2) $R_1 \cap R_2 = 0 \Rightarrow P = P_1 \cap P_2$.

Доказательство. Сначала докажем 1). Имеем

$$R_1 = (\sigma_1 - 1_V) V = (\sigma_1 - 1_V)(P_1 + P_2) = (\sigma_1 - 1_V) P_2 = \\ = (\sigma_1\sigma_2 - 1_V) P_2 \subseteq (\sigma - 1_V) V = R.$$

Аналогично, рассматривая $\sigma^{-1} = \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$, получим $R_2 \subseteq R$. Следовательно, $R = R_1 + R_2$ по 1.3.1. Теперь докажем 2). Для любого x из P имеем

$$\sigma_2 x - x = -(\sigma_1(\sigma_2 x) - \sigma_2 x) \in R_1 \cap R_2 = 0,$$

поэтому $P \subseteq P_2$, $P \subseteq P_1$. Но тогда $P = P_1 \cap P_2$. Предложение доказано.

1.3.4. *Пусть* σ *и* Σ — *элементы из* $\boldsymbol{GL}_n(V)$. *Вычетным и неподвижным пространствами преобразования* $\Sigma\sigma\Sigma^{-1}$ *являются* ΣR *и* ΣP *соответственно. В частности,* $\operatorname{res}\Sigma\sigma\Sigma^{-1}=\operatorname{res}\sigma$ *и*

$$(\sigma\Sigma=\Sigma\sigma)\Rightarrow(\Sigma R=R \text{ и } \Sigma P=P).$$

1.3.5. *Пусть* σ_1, σ_2 — *элементы из* $\boldsymbol{GL}_n(V)$. *Если* $R_1\subseteq P_2$ *и* $R_2\subseteq P_1$, *то* $\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$.

Доказательство. Для произвольного x из V имеем

$$\sigma_1\sigma_2(x)=\sigma_1(\sigma_2 x-x)+\sigma_1 x=\sigma_2 x-x+\sigma_1 x=$$
$$=(\sigma_1 x-x)+\sigma_2 x=\sigma_2(\sigma_1 x-x)+\sigma_2 x=\sigma_2\sigma_1 x,$$

что и требовалось доказать.

Взяв подходящие $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$, легко убедиться, что обратное к 1.3.5 утверждение верно не всегда. Однако имеет место следующее предложение.

1.3.6. *Если* σ_1, σ_2 — *элементы из* $\boldsymbol{GL}_n(V)$ *и* $\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$, *то*

$$R_1\subseteq P_2 \quad \text{и} \quad R_2\subseteq P_1$$

при условии, что либо $R_1\cap R_2=0$, *либо* $V=P_1+P_2$.

Доказательство. Пусть сначала $R_1\cap R_2=0$. Из 1.3.4 и определения пространства R_1 следует $(\sigma_1-1_V)R_2\subseteq R_1\cap R_2=0$, откуда $R_2\subseteq P_1$. Аналогично получается соотношение $R_1\subseteq P_2$. Если же $V=P_1+P_2$, то

$$R_1=(\sigma_1-1_V)V=(\sigma_1-1_V)(P_1+P_2)=(\sigma_1-1_V)P_2\subseteq P_2.$$

Аналогично получается соотношение $R_2\subseteq P_1$.

1.3.7. *Пусть* σ — *элемент из* $\boldsymbol{GL}_n(V)$. *Преобразование* σ^2 *тогда и только тогда тривиально, когда* $\sigma|_R=-1_R$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sigma^2=1_V &\Leftrightarrow \sigma^2 x=x && \text{для всех } x\in V\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \sigma(\sigma x-x)=-(\sigma x-x) && \text{для всех } x\in V\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \sigma y=-y && \text{для всех } y\in R\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \sigma|_R=-1_R.\end{aligned}$$

Элемент σ, такой, что $\sigma^2=1_V$, и вообще любой элемент ξ абстрактной группы, удовлетворяющий условию $\xi^2=1$, называется *инволюцией*.

1.3.8. *Если* $\sigma\neq 1$ — *произвольный элемент группы* $\boldsymbol{GL}_n(V)$, *то* $\det(\sigma|_R)=\det\sigma$.

Доказательство. Возьмем базу подпространства R и расширим ее до базы пространства V. Из вида матрицы преобразования σ в этой базе сразу получается наше утверждение.

1.3.9. *Если* $V = V_1 \oplus V_2$ *и* $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$, *где* $\sigma_1 \in \boldsymbol{GL}_{n_1}(V_1)$, $\sigma_2 \in \boldsymbol{GL}_{n_2}(V_2)$, *то*

$$R = R_1 \oplus R_2, \quad P = P_1 \oplus P_2.$$

§ 1.4. Трансвекции

Элемент σ из $\boldsymbol{GL}_n(V)$ называется *трансвекцией*, если $\sigma = 1_V$ или

$$\operatorname{res} \sigma = 1, \quad \det \sigma = 1;$$

σ называется *дилатацией*, если

$$\operatorname{res} \sigma = 1, \quad \det \sigma \neq 1.$$

Если σ — трансвекция (дилатация), а Σ — любой элемент из $\boldsymbol{GL}_n(V)$, то $\Sigma\sigma\Sigma^{-1}$ — тоже трансвекция (дилатация) ввиду 1.3.4.

1.4.1. *Пусть* $n \geqslant 2$ *и* σ — *элемент из* $\boldsymbol{GL}_n(V)$, *для которого* $\operatorname{res} \sigma = 1$.

1) $R \subseteq P$ *тогда и только тогда, когда* σ — *трансвекция*.

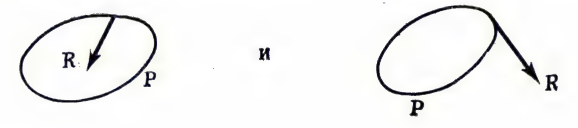
2) $V = R \oplus P$ *тогда и только тогда, когда* σ — *дилатация*.

3) *Если* σ — *трансвекция, то множество ее собственных векторов совпадает с* $\dot{P}$, *а все собственные значения равны* 1.

4) *Если* σ — *дилатация, то множество ее собственных векторов совпадает с* $\dot{R} \cup \dot{P}$, *а* 1 *и* $\det \sigma$ *являются ее собственными значениями.*

Доказательство. Для доказательства 1) достаточно применить 1.3.8. Далее, 2) следует из 1). Для нахождения собственных значений в 3) возьмем базу подпространства P, расширим ее до базы пространства V и рассмотрим матрицу трансвекции σ в этой базе. Ясно, что множество собственных векторов трансвекции σ совпадает с $\dot{P}$. Для доказательства 4) нужно взять базу пространства V, составленную из баз подпространств P и R. Предложение доказано.

Таким образом, трансвекции и дилатации можно изобразить так:



Если $n = 1$, то 1_V является единственной трансвекцией, а если $F = \mathbb{F}_2$, то дилатаций не существует.

Для произвольных $a \in V$, $\rho \in V'$ определим линейное отображение $\tau_{a,\rho}$ пространства V в себя равенством

$$\tau_{a,\rho} x = x + \rho(x) a, \quad x \in V.$$

Очевидно, $(\tau_{a,\rho} - 1_V) V \subseteq Fa$, поэтому отображение $\tau_{a,\rho}$, если оно обратимо, является трансвекцией или дилатацией. Заметим, что

$$\tau_{a,\rho} = 1_V \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{или} \quad \rho \equiv 0$$

и

$$\tau_{\lambda a,\rho} = \tau_{a,\lambda\rho} \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \dot{F}.$$

1.4.2. *Пусть a, a' — ненулевые векторы, ρ, ρ' — ненулевые функционалы, так что $\tau_{a,\rho}$ и $\tau_{a',\rho'}$ отличны от 1_V. Тогда*

1) $\tau_{a,\rho} = \tau_{a',\rho'}$ *в том и только том случае, когда существует такое $\lambda \in \dot{F}$, что $a' = \lambda a$ и $\rho' = \lambda^{-1}\rho$,*

2) $\tau_{a,\rho} = \tau_{a',\rho}$ *равносильно $a = a'$,*

3) $\tau_{a,\rho} = \tau_{a,\rho'}$ *равносильно $\rho = \rho'$.*

Доказательство. Все утверждения прямо следуют из определений.

1.4.3. $\det \tau_{a,\rho} = 1 + \rho a$.

Доказательство. Возьмем $n - 1$ линейно независимых векторов $x_1, \ldots, x_{n-1}$, для которых $\rho x_1 = \ldots = \rho x_{n-1} = 0$, и положим $H = Fx_1 + \ldots + Fx_{n-1}$. Если $a \in H$, то, взяв $x_n \in V - H$, видим, что $\tau_{a,\rho} x_n - x_n$ лежит в H. Из вида матрицы преобразования $\tau_{a,\rho}$ в базе $x_1, \ldots, x_n$ получаем требуемое. Если $a \notin H$, то берем $x_n = a$ и рассуждаем точно так же. Предложение доказано.

Итак, $\tau_{a,\rho}$ тогда и только тогда лежит в $\boldsymbol{GL}_n(V)$, когда $\rho a \neq -1$; $\tau_{a,\rho}$ — трансвекция (дилатация), если и только если $\rho a = 0$ (соответственно $\rho a \neq 0, -1$). Если σ — неединичный элемент из $\boldsymbol{GL}_n(V)$ и $\sigma = \tau_{a,\rho}$, то $R = Fa$, $P = \rho^{-1}(0)$. В общем случае

$$\tau_{a,\rho}\tau_{b,\varphi} x = \{x + (\rho x) a + (\varphi x) b\} + (\varphi x)(\rho b) a.$$

Если $\tau_{a,\rho}$ и $\tau_{b,\rho}$ — трансвекции, то

$$\tau_{a,\rho}\tau_{b,\rho} = \tau_{a+b,\rho};$$

если $\tau_{a,\rho}$ и $\tau_{a,\varphi}$ — трансвекции, то

$$\tau_{a,\rho}\tau_{a,\varphi} = \tau_{a,\rho+\varphi}.$$

В частности, если $\tau_{a,\rho}$ — трансвекция, m — положительное целое число, то

$$\tau_{a,\rho}^m = \tau_{ma,\rho}.$$

Для произвольного σ из $\boldsymbol{GL}_n(V)$

$$\sigma\tau_{a,\rho}\sigma^{-1} = \tau_{\sigma a,\rho\sigma^{-1}}.$$

1.4.4. *Допустим, что $n \geqslant 2$. Пусть L — прямая, а H — гиперплоскость пространства V. Если $L \subseteq H$, то существует трансвекция σ из $\boldsymbol{GL}_n(V)$, для которой $R = L$, $P = H$. Если $L \nsubseteq H$ и $F \neq \mathbb{F}_2$, то существует дилатация из $\boldsymbol{GL}_n(V)$, для которой $R = L$, $P = H$.*

Доказательство. Взять подходящее $\tau_{a,\rho}$.

1.4.5. *Пусть σ — элемент из $\boldsymbol{GL}_n(V)$ и* $\operatorname{res}\sigma = 1$. *Тогда R — прямая, а P — гиперплоскость.*

Если ρ — ненулевой функционал из P^0, то существует такой вектор a из R, что $\sigma = \tau_{a,\rho}$.

Если b — ненулевой вектор из R, то существует такой функционал φ из P^0, что $\sigma = \tau_{b,\varphi}$.

Доказательство. Пусть сначала задан функционал ρ. Зафиксируем $z \in V - P$, для которого $\rho z = 1$. Положим $a = \sigma z - z \in R$. Ясно, что $\tau_{a,\rho}$ и σ совпадают на P. Но они совпадают и на z, так как

$$\tau_{a,\rho}z = z + (\rho z)a = z + a = \sigma z.$$

Следовательно, $\sigma = \tau_{a,\rho}$. Для доказательства второй части положим $a = \lambda b$, тогда $\sigma = \tau_{b,\lambda\rho}$.

1.4.6. *Пусть τ_1, τ_2 — трансвекции из $\boldsymbol{GL}_n(V)$ и α — скаляр. Равенство $\alpha\tau_1 = \tau_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha = 1$ и $\tau_1 = \tau_2$. В частности, $\alpha\tau_1$ не является трансвекцией, если $\alpha \neq 1$.*

Доказательство. Надо воспользоваться тем, что все собственные значения трансвекции равны 1.

1.4.7. *Пусть σ_1, σ_2 — элементы из $\boldsymbol{GL}_n(V)$, имеющие вычет* 1, *и $\sigma_1\sigma_2 \neq 1_V$. Равенство* $\operatorname{res}\sigma_1\sigma_2 = 1$ *выполняется тогда и только тогда, когда $R_1 = R_2$ или $P_1 = P_2$.*

Доказательство. Положим $\sigma = \sigma_1\sigma_2$. Если $R_1 = R_2$, то из включения $R \subseteq R_1 + R_2$ следует, что R — прямая, поэтому $\operatorname{res}\sigma = 1$. Если $P_1 = P_2$, то из включения $P \supseteq P_1 \cap P_2$ следует, что P — гиперплоскость, поэтому $\operatorname{res}\sigma = 1$. Обратно, пусть $\operatorname{res}\sigma_1\sigma_2 = 1$. Если $P_1 = P_2$, то доказывать нечего, поэтому предположим, что $V = P_1 + P_2$. Тогда $R = R_1 + R_2$ по

1.3.3. Но R — прямая, следовательно, $R_1 = R_2$. Предложение доказано.

1.4.8. *Если* σ_1 *и* σ_2 — *нетривиальные трансвекции из* $\boldsymbol{GL}_n(V)$, *то* $\sigma_1\sigma_2$ *тогда и только тогда является трансвекцией, когда* $R_1 = R_2$ *или* $P_1 = P_2$.

Доказательство. Применить 1.4.7.

1.4.9. *Пусть* X — *подгруппа группы* $\boldsymbol{GL}_n(V)$, *состоящая только из трансвекций. Тогда все нетривиальные элементы из* X *либо имеют одинаковые вычетные прямые, либо одинаковые неподвижные гиперплоскости.*

Доказательство. Предположим, что существуют две нетривиальные трансвекции σ_1, σ_2 из X, для которых $R_1 \neq R_2$, иначе доказывать нечего. Тогда $P_1 = P_2$ по 1.4.8. Мы должны убедиться, что для произвольной нетривиальной трансвекции σ из X имеет место равенство $P = P_1 = P_2$. Но если $P \neq P_1$, то только что использованное рассуждение дает $R = R_1$ и $R = R_2$. Отсюда $R_1 = R_2$, противоречие.

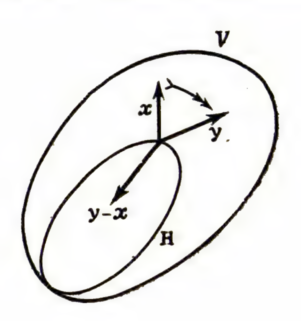
1.4.10. *Нетривиальные трансвекции* σ_1 *и* σ_2 *тогда и только тогда перестановочны, когда*

$$R_1 \subseteq P_2 \quad \text{и} \quad R_2 \subseteq P_1.$$

Доказательство. Если имеют место включения, то $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ по 1.3.5. Обратно, пусть $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. Имеем $R_1 \subseteq P_1$ и $R_2 \subseteq P_2$, так как σ_1 и σ_2 — трансвекции. Если $R_1 \cap R_2 = 0$, то достаточно сослаться на 1.3.6. Пусть $R_1 \cap R_2 \neq 0$. Тогда $R_1 = R_2$, так как R_1, R_2 — прямые. Следовательно, $R_1 = R_2 \subseteq P_1$ и $R_2 = R_1 \subseteq P_2$. Предложение доказано.

1.4.11. *Пусть* x, y — *линейно независимые векторы пространства* V, *а* H — *гиперплоскость в* V, *содержащая разность* $y - x$, *но не содержащая* x. *Существует такая трансвекция* σ, *для которой* $P = H$, $R = F(y - x)$ *и* $\sigma x = y$.

Доказательство. Ясно, что здесь $n > 1$. Возьмем



функционал $\rho \in V'$, для которого $\rho H = 0$ и $\rho x = 1$. Тогда $\rho(y - x) = 0$, так как $y - x \in H$. Поэтому $\sigma = \tau_{y-x,\,\rho}$ — трансвекция, для которой $R = F(y - x)$, $P = H$. Наконец, $\sigma x = \tau_{y-x,\,\rho} x = x + (\rho x)(y - x) = y$.

1.4.12. *Пусть H, H' — различные гиперплоскости в V, а L — прямая в V, не лежащая ни в H, ни в H'. Тогда существует трансвекция τ с вычетной прямой L, такая, что $\tau H = H'$.*

Доказательство. Положим $L = Fa$. Пусть $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — база пространства H. Так как $V = H' \oplus L$, то каждое x_i имеет вид $x_i = X_i + \lambda_i a$, где $X_i \in H'$, $\lambda_i \in F$. Поскольку $x_1, \ldots, x_{n-1}$, a — база пространства V, то найдется такой линейный функционал ρ, что

$$\rho x_i = -\lambda_i, \quad \rho a = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n - 1.$$

Тогда $\tau_{a,\,\rho}$ — нетривиальная трансвекция, ибо $a \neq 0$, $\rho \neq 0$ и $\rho a = 0$; ее вычетной прямой является $Fa = L$. Но

$$\tau_{a,\,\rho} x_i = x_i + (\rho x_i) a = x_i - \lambda_i a = X_i,$$

поэтому $\tau_{a,\,\rho} H \subseteq H'$ и, следовательно, $\tau_{a,\,\rho} H = H'$.

§ 1.5. Матрицы

Обозначим через $\boldsymbol{GL}_n(F)$ мультипликативную группу обратимых матриц порядка n над полем F, а через $\boldsymbol{SL}_n(F)$ — подгруппу матриц с определителем 1. Группу скалярных матриц $\operatorname{diag}(\alpha, \ldots, \alpha)$, $\alpha \in \dot{F}$, обозначим через $\boldsymbol{RL}_n(F)$. Если зафиксирована база пространства V, то ассоциированный изоморфизм алгебры линейных преобразований на алгебру матриц индуцирует изоморфизмы

$$\boldsymbol{GL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{GL}_n(F),$$
$$\boldsymbol{SL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{SL}_n(F),$$
$$\boldsymbol{RL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{RL}_n(F).$$

Для матриц мы определим P как естественный гомоморфизм

$$P\colon\ \boldsymbol{GL}_n(F) \twoheadrightarrow \boldsymbol{GL}_n(F)/\boldsymbol{RL}_n(F).$$

В частности, $\boldsymbol{PSL}_n(F)$ — образ группы $\boldsymbol{SL}_n(F)$ в $\boldsymbol{PGL}_n(F) = \boldsymbol{GL}_n(F)/\boldsymbol{RL}_n(F)$. Ядро гомоморфизма P, суженного на $\boldsymbol{SL}_n(F)$, совпадает, конечно, с пересечением $\boldsymbol{SL}_n(F) \cap \boldsymbol{RL}_n(F)$. Оче-

видно,

$$\boldsymbol{PGL}_n(V) \simeq \boldsymbol{PGL}_n(F) = \boldsymbol{GL}_n(F)/\boldsymbol{RL}_n(F)$$

и

$$\boldsymbol{PSL}_n(V) \simeq \boldsymbol{PSL}_n(F) = \boldsymbol{SL}_n(F)/\boldsymbol{SL}_n(F) \cap \boldsymbol{RL}_n(F).$$

Пусть $n \geqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \neq j$, $\lambda \in F$. Через $t_{ij}(\lambda)$ будем обозначать матрицу порядка n, содержащую 1 по диагонали, λ на месте (i, j) и 0 на остальных местах; назовем такие матрицы *элементарными*.

Предположим, что $n \geqslant 2$. Зафиксируем базу $x_1, \ldots, x_n$ пространства V. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — сопряженная с ней база пространства V'. Под *элементарной трансвекцией* относительно базы $x_1, \ldots, x_n$ мы понимаем трансвекцию вида $\tau_{\lambda x_i, \nu\rho_j}$ $(i \neq j)$, где $\lambda, \nu \in F$. Конечно, все элементарные трансвекции представимы в виде $\tau_{\lambda x_i, \rho_j}$, а также в виде $\tau_{x_i, \lambda\rho_j}$. Очевидно, что любая трансвекция элементарна в некоторой базе. Каноническое соответствие между преобразованиями и их матрицами в базе $x_1, \ldots, x_n$ приводит к соответствию

$$\tau_{\lambda x_i, \rho_j} \leftrightarrow t_{ij}(\lambda)$$

между элементарными трансвекциями и элементарными матрицами. В частности, для произвольных λ, ν из F

$$t_{ij}(\lambda)\, t_{ij}(\nu) = t_{ij}(\lambda + \nu).$$

Непосредственно вычисляя коммутатор, получим

$$[\tau_{\lambda x_i, \rho_k}, \tau_{\nu x_k, \rho_j}] = \tau_{\lambda\nu x_i, \rho_j}$$

и, следовательно,

$$[t_{ik}(\lambda), t_{kj}(\nu)] = t_{ij}(\lambda\nu)$$

для различных i, j, k.

§ 1.6. Проективные трансвекции

Проективность k пространства V называется *проективной трансвекцией*, если $k = \bar{\sigma}$ для некоторой трансвекции σ из $\boldsymbol{GL}_n(V)$. Ввиду 1.4.6 трансвекция σ, являющаяся представителем проективной трансвекции $k = \bar{\sigma}$, единственна, она называется *представляющей трансвекцией* проективной трансвекции k. Определим вычетное и неподвижное пространства проективной трансвекции как соответствующие пространства ее представляющей трансвекции и распространим соглашение параграфа 1.3 на проективные трансвекции — например, если

рассматривается проективная трансвекция σ из $\boldsymbol{PGL}_n(V)$ (или $\bar{\sigma}$, где σ — трансвекция из $\boldsymbol{GL}_n(V)$), то R будет обозначать ее вычетное, а P — неподвижное пространство. Заметим, что мы не пытаемся определить вычетное и неподвижное пространства для произвольного элемента из $\boldsymbol{PGL}_n(V)$. Конечно, если σ — проективная трансвекция и $\sigma \neq 1$, то R — прямая, P — гиперплоскость и $R \subseteq P$. С другой стороны, если даны $L \in P^1(V)$, $H \in P^{n-1}(V)$ и $L \subseteq H$, то всегда существует проективная трансвекция σ из $\boldsymbol{PGL}_n(V)$, для которой $R = L$ и $P = H$. Если σ — проективная трансвекция, а Σ — произвольный элемент из $\boldsymbol{PGL}_n(V)$, то $\Sigma\sigma\Sigma^{-1}$ — также проективная трансвекция и ее пространствами будут ΣR и ΣP соответственно. В частности,

$$(\Sigma\sigma = \sigma\Sigma) \Rightarrow (\Sigma R = R,\ \Sigma P = P).$$

Заметим, что мы иногда будем записывать элементы из $\boldsymbol{PGL}_n(V)$ в виде $\bar{\sigma}$, где $\sigma \in \boldsymbol{GL}_n(V)$, а иногда — в виде σ, где $\sigma \in \boldsymbol{PGL}_n(V)$.

1.6.1. *Предположим, что $n \geqslant 3$. Если σ_1, σ_2 — нетривиальные проективные трансвекции, то $\sigma_1\sigma_2$ — проективная трансвекция тогда и только тогда, когда $R_1 = R_2$ или $P_1 = P_2$.*

Доказательство. Применить 1.4.8.

1.6.2. Пример. Если $n = 2$ и x_1, x_2 — база пространства V, а ρ_1, ρ_2 — сопряженная с ней база пространства V', то равенство

$$\tau_{-2x_1,\, \rho_2}\tau_{2x_2,\, \rho_1} = -\tau_{x_1 - x_2,\, 2\rho_1 + 2\rho_2}$$

легко следует из § 1.4. Написав черту над обеими частями этого равенства, получим две нетривиальные проективные трансвекции, произведение которых является также проективной трансвекцией, хотя их пространства не совпадают. Поэтому в 1.6.1 необходимо предполагать, что $n \geqslant 3$.

1.6.3. *Пусть X — подгруппа группы $\boldsymbol{PGL}_n(V)$, состоящая только из проективных трансвекций. Тогда все нетривиальные элементы из X имеют либо общую вычетную прямую, либо общую неподвижную гиперплоскость.*

Доказательство. Если $n \geqslant 3$, то применяем 1.6.1 и заканчиваем доказательство, как в 1.4.9. Пусть $n = 2$. Ясно, что $X \subseteq \boldsymbol{PSL}_2$. Пусть G — прообраз X относительно гомоморфизма $P|_{SL_2}$. Тогда G — подгруппа в $\boldsymbol{SL}_2$, содержащая ядро $\pm 1_V$ гомоморфизма $P|_{SL_2}$, и каждый элемент группы G имеет вид $\pm\tau$ для некоторой трансвекции τ из G. Достаточно

доказать, что если τ_L, τ_K—трансвекции из G с вычетными прямыми L и K, то $L=K$. Допустим противное. По определению G имеем $\tau_L\tau_K=\pm\tau_J$ для некоторой прямой J, отличной от L и K. Если $\tau_L\tau_K=\tau_J$, то $L=K$ в силу 1.4.8. Значит, $\tau_L\tau_K\neq\tau_J$, т. е. характеристика поля F отлична от 2 и $\tau_L\tau_K= =-\tau_J$. Ввиду 1.4.8 $\tau_J\tau_K$ не является трансвекцией, поэтому и по определению G имеем $\tau_J\tau_K=-\tau_H$ для некоторой прямой H. Подставив одно равенство в другое, получим $\tau_L\tau_K^2=\tau_H$. Но τ_K^2 — нетривиальная трансвекция с вычетной прямой K, так как характеристика поля не равна 2. Ввиду 1.4.8 отсюда следует, что $L=K$ — противоречие.

1.6.4. *Две нетривиальные проективные трансвекции* σ_1 *и* σ_2 *из* $\boldsymbol{PGL}_n(V)$ *тогда и только тогда перестановочны, когда* $R_1\subseteq P_2$ *и* $R_2\subseteq P_1$.

Доказательство. Применить предложения 1.4.10 и 1.4.6.

1.6.5. *Пусть характеристика поля* F *отлична от* 2. *Если* X *— множество попарно перестановочных инволюций из* $\boldsymbol{GL}_n(V)$, *то существует такая база пространства* V, *в которой*

$$\Sigma\sim\operatorname{diag}(\pm1,\ldots,\pm1)\quad \textit{для всех}\quad \Sigma\in X.$$

В частности, $\operatorname{card}X\leqslant 2^n$ *и* $\operatorname{card}PX\leqslant 2^{n-1}$.

Доказательство проведем индукцией по n. Для $n=1$ результат очевиден. Пусть $n>1$. Возьмем в X элемент $\sigma\neq\pm1_V$ (если таких нет, то доказывать нечего). Ввиду 1.3.7 $\sigma|_R=-1_R$, откуда $R\cap P=0$, $V=R\oplus P$. Пространства R и P ненулевые, поскольку $\sigma\neq\pm1_V$. Так как произвольное Σ из X перестановочно с σ, то $\Sigma R=R$ и $\Sigma P=P$ по 1.3.4. Остается применить индукцию к попарно перестановочным семействам $\Sigma|_R$ и $\Sigma|_P$, где Σ пробегает X.

§ 1.7. Комментарии

Линейные группы — лишь одно из четырех больших семейств так называемых классических групп, остальные три семейства — это симплектические, ортогональные и унитарные группы. С ними тесно связаны группы Шевалле и алгебраические группы. Все они широко изучались над полями и — с переменным успехом — над кольцами, идущими обычно из алгебраической теории чисел. В наших лекциях мы сосредоточим внимание на линейных группах, отличающихся наиболее хорошим поведением среди классических групп, и рассмотрим три основных вопроса: каковы порождающие элементы, каково строение и каковы изоморфизмы этих групп? Есть еще чет-

вертый вопрос, тесно с ними связанный, но представляющий интерес, главным образом, для ортогональных и унитарных групп и потому не отраженный здесь, — это вопрос о классификации подлежащих пространств и модулей. Наш принцип состоит в том, чтобы рассматривать вещи коммутативные и общие, иными словами, излагать все, что справедливо для произвольных полей и областей целостности, но не касаться теорий, зависящих от специальных свойств основного кольца, так как это завело бы нас слишком далеко. В качестве дополнительной литературы по классическим группам над полем (и частично над телом) укажем книги Артина [3] и Дьёдонне [14], по проблеме классификации над арифметическими кольцами и полями — книги О'Миры [27] и Серра [32], по группам Шевалле — книгу Картера [8], по алгебраическим группам — книгу Бореля [6] и, наконец, для воссоздания исторической перспективы — книгу Диксона [15].

Глава 2. ТЕОРЕМЫ О ПОРОЖДЕНИИ

§ 2.1. Порождение трансвекциями

2.1.1. Теорема. *При $n \geqslant 2$ группа $\boldsymbol{SL}_n(F)$ порождается элементарными матрицами. При $n \geqslant 2$ группа $\boldsymbol{SL}_n(V)$ порождается элементарными трансвекциями относительно любой заданной базы. Группа $\boldsymbol{GL}_n(V)$ порождается трансвекциями и дилатациями.*

Доказательство. Первая часть доказывается общеизвестными манипуляциями над строками и столбцами. Вторая следует из первой в силу матричного изоморфизма. Третья следует из второй, если учесть, что каждый элемент из $\dot{F}$ является определителем некоторой дилатации. Теорема доказана.

В этой главе нас будет интересовать вопрос о наименьшем числе трансвекций, необходимом для представления заданного σ из $\boldsymbol{SL}_n(V)$ в виде произведения трансвекций. В действительности мы рассмотрим более общий случай, когда $\sigma \in \boldsymbol{GL}_n(V)$. Такой элемент σ является произведением

$$\sigma = \tau_1 \ldots \tau_k \Sigma_0,$$

где τ_i — трансвекции, а Σ_0 — трансвекция или дилатация в зависимости от того, лежит ли σ в $\boldsymbol{SL}_n(V)$ или нет. Другими словами, каждое $\sigma \neq 1_V$ может быть представлено как произведение нескольких трансвекций — скажем, k штук — и элемента с вычетом 1, и мы хотим найти зависимость числа k

от σ. Равенство

$$\tau_1 \ldots \tau_i \Sigma \tau_{i+1} \ldots \tau_k = \tau_1 \ldots \tau_i \tau_{i+1} (\tau_{i+1}^{-1} \Sigma \tau_{i+1}) \ldots \tau_k$$

показывает, что в этом рассмотрении несущественно, где в произведении находится элемент Σ вычета 1, — он может изменяться, но все τ_i остаются прежними.

2.1.2. *Если преобразование* σ *из* $\boldsymbol{GL}_n(V)$ *представлено в виде*

$$\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_t,$$

где $\sigma_i \in \boldsymbol{GL}_n(V)$, $\operatorname{res} \sigma_i = 1$ *для* $1 \leqslant i \leqslant t$, *то* $t \geqslant \operatorname{res} \sigma$. *Если* $t = \operatorname{res} \sigma$, *то*

$$R = R_1 + \ldots + R_t, \quad P = P_1 \cap \ldots \cap P_t.$$

Доказательство. Ввиду 1.3.1 $\operatorname{res} \sigma \leqslant t$, и первое утверждение доказано. Допустим, что $\operatorname{res} \sigma = t$. Положим

$$\sigma_i' = \sigma_1 \ldots \sigma_i$$

для $1 \leqslant i \leqslant t$. Имеем $\operatorname{res} \sigma_i' \leqslant i$. Если бы было $\operatorname{res} \sigma_i' < i$, то получили бы $\operatorname{res} \sigma_t' < t$, что противоречит предположению, поэтому $\operatorname{res} \sigma_i' = i$ для $1 \leqslant i \leqslant t$. Утверждается, что

$$R_i' = R_1 + \ldots + R_i, \quad P_i' = P_1 \cap \ldots \cap P_i$$

для $1 \leqslant i \leqslant t$. (Этим, конечно, предложение будет доказано.) При $i = 1$ доказывать нечего. Перейдем от i к $i + 1$. Так как $\sigma_{i+1}' = \sigma_i' \sigma_{i+1}$, то $R_{i+1}' \subseteq R_i' + R_{i+1}$, поэтому из размерностных соображений $R_{i+1}' = R_i' + R_{i+1}$, т. е. для вычетных пространств утверждение доказано. Сравнивая размерности в равенстве $R_{i+1}' = R_i' + R_{i+1}$, получаем, что $R_i' \cap R_{i+1} = 0$. Отсюда в силу 1.3.3 $P_{i+1}' = P_i' \cap P_{i+1}$, т. е. и для неподвижных пространств утверждение доказано.

Пусть U — подпространство пространства V. Поставим ему в соответствие подгруппу

$$G(U) = \{\sigma \in \boldsymbol{GL}_n(V) \mid P \supseteq U\},$$

т. е.

$$G(U) = \{\sigma \in \boldsymbol{GL}_n(V) \mid \sigma x = x \text{ для всех } x \in U\}.$$

Рассмотрим векторное пространство V/U над F. Напомним (из линейной алгебры) смысл этого понятия: берутся аддитивные группы V, U, V/U и естественный аддитивный гомоморфизм

$$\tilde{}: V \twoheadrightarrow V/U.$$

затем определяется $\alpha\tilde{x}$ по правилу

$$\alpha\tilde{x} = \widetilde{\alpha x} \quad \text{для всех} \quad \alpha \in F \quad \text{и всех} \quad \tilde{x} \in V/U.$$

Это превращает $\tilde{}$ в F-линейное отображение, так что

$$\dim V/U + \dim U = \dim V.$$

Для каждого σ из $G(U)$ определяется отображение $\tilde{\sigma}$ пространства V/U на себя по правилу

$$\tilde{\sigma}\tilde{x} = \widetilde{\sigma x} \quad \text{для всех} \quad \tilde{x} \in V/U.$$

Заметим, что преобразование $\tilde{\sigma}$ является F-линейным, лежит в $\boldsymbol{GL}_r(V/U)$, $\det\tilde{\sigma} = \det\sigma$, $\widetilde{\sigma_1\sigma_2} = \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2$ и всякий элемент из $\boldsymbol{GL}_r(V/U)$ имеет вид $\tilde{\sigma}$. Другими словами, естественный гомоморфизм

$$\tilde{}: V \twoheadrightarrow V/U$$

определяет отображение

$$\tilde{}: G(U) \twoheadrightarrow \boldsymbol{GL}_r(V/U),$$

которое сохраняет определитель и является гомоморфизмом *на*. Будем называть эти два отображения *тильда-отображениями, сопровождающими редукцию по модулю* U. Ясно, что если σ — элемент из $\boldsymbol{GL}_n(V)$, для которого $P \supseteq U$, то вычетное пространство элемента $\tilde{\sigma}$ равно $\tilde{R}$. В частности,

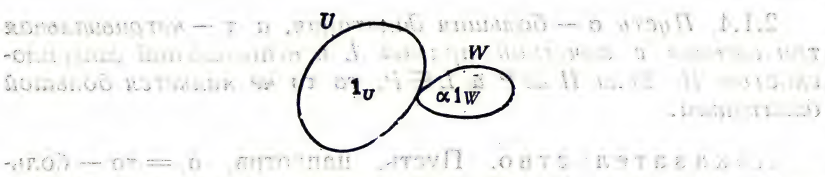
$$\operatorname{res}\tilde{\sigma} \leqslant \operatorname{res}\sigma,$$

$$\operatorname{res}\tilde{\sigma} = \operatorname{res}\sigma \Leftrightarrow R \cap U = 0$$

и

$$\tilde{\sigma} = 1_{V/U} \Leftrightarrow R \subseteq U.$$

Элемент σ из $\boldsymbol{GL}_n(V)$ будем называть *большой дилатацией*, если существует такое разложение $V = U \oplus W$, что $W \neq 0$ и $\sigma = (1_U) \oplus (\alpha 1_W)$ для некоторого $\alpha \neq 1$. Большую дилатацию можно нарисовать так:



$(\alpha \neq 1, \ W \neq 0).$

Если σ — большая дилатация и, как выше, $\sigma = (1_U) \oplus (\alpha 1_W)$, то в силу 1.3.2

$$R = W, \quad P = U.$$

Заметим, что каждая дилатация является большой дилатацией, однако не каждая большая дилатация является дилатацией. Нетривиальное растяжение является большой дилатацией, а 1_V — нет. Большая дилатация может лежать в $\boldsymbol{SL}_n(V)$.

2.1.3. *Пусть σ — неединичный элемент из $\boldsymbol{GL}_n(V)$ и $\tilde{}$ является тильда-отображением, сопровождающим редукцию по модулю неподвижного пространства P элемента σ. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) *σ — большая дилатация,*
2) *$\tilde{\sigma}$ — нетривиальное растяжение,*
3) *$\sigma|_R$ — нетривиальное растяжение.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Имеем $V = U \oplus W$, где $W \neq 0$, $\sigma = (1_U) \oplus (\alpha 1_W)$ для некоторого скаляра $\alpha \neq 0, 1$. Кроме того, $P = U$ и $R = W$. Тогда

$$\tilde{\sigma}\tilde{w} = \widetilde{\sigma w} = \widetilde{\alpha w} = \alpha\tilde{w} \text{ для всех } w \in W.$$

Так как $\tilde{w}$ — произвольный элемент из V/P, то $\tilde{\sigma}$ — нетривиальное растяжение $\alpha 1_{V/P}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\tilde{\sigma}$ — нетривиальное растяжение. Тогда

$$\operatorname{res} \tilde{\sigma} = \dim V/P = \dim V - \dim P = \operatorname{res} \sigma,$$

поэтому $R \cap P = 0$ и, следовательно, $V = P \oplus R$. Пусть $\tilde{\sigma} = \alpha 1_{V/P}$, где α — скаляр $\neq 0, 1$. Для произвольного r из R имеем $\tilde{\sigma}\tilde{r} = \alpha\tilde{r}$, откуда $\sigma r - \alpha r \in P$. Но $\sigma R = R$, поэтому $\sigma r - \alpha r \in R$. Значит, $\sigma r - \alpha r \in R \cap P = 0$. Окончательно, $\sigma|_R = \alpha 1_R$.

3) $\Rightarrow$ 1). Ясно, что $R \cap P = 0$, поэтому $V = P \oplus R$ и $\sigma = (1_P) \oplus (\alpha 1_R)$ для некоторого скаляра $\alpha \neq 0, 1$. Предложение доказано.

2.1.4. *Пусть σ — большая дилатация, а τ — нетривиальная трансвекция с вычетной прямой L и неподвижной гиперплоскостью H. Если $H \supseteq P$ и $L \not\subseteq P$, то $\tau\sigma$ не является большой дилатацией.*

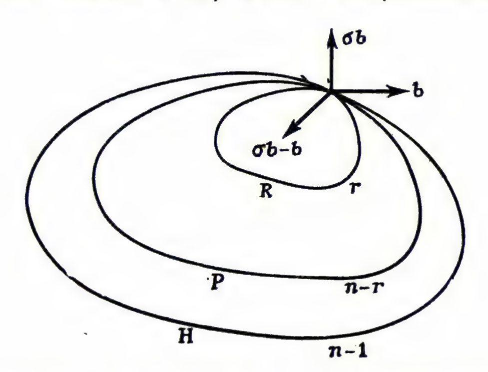
Доказательство. Пусть, напротив, $\sigma_1 = \tau\sigma$ — большая дилатация. Пусть $\tilde{}$ обозначает тильда-отображение,

сопровождающее редукцию по модулю P. Элементы σ_1, σ, τ лежат в $G(P)$, поэтому к ним можно применить тильда-отображение. Мы знаем, что $\tilde{\tau}$ — нетривиальная трансвекция, так как $L \cap P = 0$. Ввиду 2.1.3 $\tilde{\sigma}$ — нетривиальное растяжение, причем существует такой скаляр $\alpha \neq 0, 1$, что $\sigma_1 r_1 = \alpha r_1$ для всех $r_1 \in R_1$. Значит, $\tilde{\sigma}_1 |_{\tilde{R}_1} = \alpha 1_{\tilde{R}_1}$. Но $R_1 \neq 0$ и $R_1 \cap P_1 = 0$, так как σ_1 — большая дилатация. В частности, $R_1 \cap P = 0$, где $R_1 \neq 0$, откуда $\tilde{R}_1 \neq 0$. Поскольку $\tilde{R}_1$ — вычетное пространство элемента $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_1 |_{\tilde{R}_1}$ — нетривиальное растяжение, то из 2.1.3 следует, что $\tilde{\sigma}_1$ — большая дилатация. Равенство $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\tau}\tilde{\sigma}$ показывает, что нетривиальная трансвекция $\tilde{\tau}$ является произведением большой дилатации и нетривиального растяжения, что невозможно (рассмотреть характеристические корни).

2.1.5. *Любое нетривиальное преобразование σ из $\mathbf{GL}_n(V)$, не являющееся большой дилатацией, можно представить в виде произведения линейного преобразования с вычетом* 1 *и* (*res* σ) — 1 *трансвекций.*

Доказательство. 1) Индукция по $r = \operatorname{res}\sigma$. Если $r = 1$, то доказывать нечего. Пусть $r > 1$ и предложение доказано для всех σ с вычетом $\operatorname{res}\sigma < r$. Докажем его для элемента σ с вычетом $\operatorname{res}\sigma = r$. Ясно, что $P \subset V$, поскольку $\dim P = n - r \leqslant n - 2$.

2) Предположим сначала, что $R \subseteq P$. Зафиксируем $b \in V - P$. Пусть H — гиперплоскость, содержащая P, но не содержащая b. Тогда σb и b — различные векторы в V, причем $b - \sigma b$ лежит в H, а σb — нет, поэтому, согласно



1.4.11, существует трансвекция τ с неподвижной гиперплоскостью H и вычетной прямой $F(b - \sigma b)$, такая, что $\tau\sigma b = b$. Неподвижное пространство элемента $\tau\sigma$ содержит $P + Fb$, поэтому $\operatorname{res}\tau\sigma \leqslant r - 1$. Так как $\sigma = \tau^{-1}(\tau\sigma)$, то ввиду 1.3.1

получаем равенство $\operatorname{res} \tau\sigma = r - 1$. Следовательно, неподвижное пространство элемента $\tau\sigma$ — это в точности $P + Fb$. Но

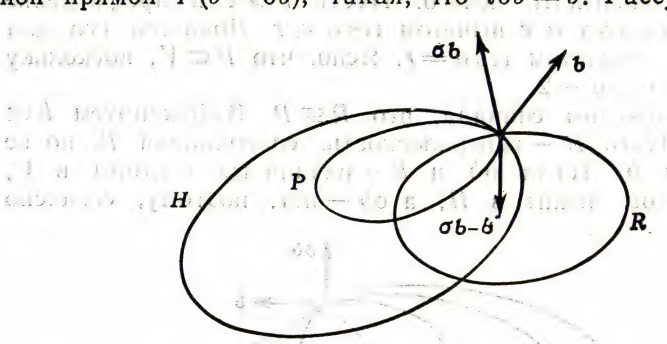
$$F(b - \sigma b) + R = R \subseteq P \subseteq P + Fb,$$

поэтому вычетное пространство элемента $\tau\sigma$ содержится в его неподвижном пространстве, в частности, ввиду 2.1.3 $\tau\sigma$ не является большой дилатацией. Остается применить индукцию к $\tau\sigma$.

3) Предположим теперь, что $R \nsubseteq P$. Пусть $\tilde{}$ обозначает тильда-отображение, сопровождающее редукцию по модулю P. Ввиду 2.1.3 элемент $\tilde{\sigma}$ не является нетривиальным растяжением, а так как $R \nsubseteq P$, то он отличен и от $1_{V/P}$. Таким образом, $\tilde{\sigma}$ вообще не является растяжением. Согласно 1.2.1, существует элемент b из V, для которого $\sigma b \notin P + Fb$. Отсюда

$$\sigma b - b \notin P + Fb, \ b \notin P + F(\sigma b - b).$$

Значит, можно найти гиперплоскость H, которая содержит $P + F(\sigma b - b)$, но не содержит b. Ввиду 1.4.11 существует трансвекция τ с неподвижной гиперплоскостью H и вычетной прямой $F(b - \sigma b)$, такая, что $\tau\sigma b = b$. Рассуждая, как



в пункте 2), найдем, что $\operatorname{res} \tau\sigma = r - 1$ и неподвижное пространство элемента $\tau\sigma$ есть в точности $P + Fb$. Если $\tau\sigma$ не является большой дилатацией, то применяем индукцию. Если $r = 2$, то все доказано. Предположим поэтому, что $\tau\sigma$ — большая дилатация и $r \geqslant 3$. Тогда $\dim P \leqslant n - 3$ и существует гиперплоскость H_1, для которой

$$H_1 \supseteq P + Fb + F(b - \sigma b).$$

Пусть τ_1 — трансвекция с неподвижной гиперплоскостью H_1 и вычетной прямой $F(b - \sigma b)$. Неподвижное пространство преобразования $\tau_1\tau\sigma$ содержит $P + Fb$, причем $\mathrm{T} = \tau_1\tau$ — транс-

векция, так как τ_1 и τ имеют общую вычетную прямую, и ввиду 2.1.4 $T\sigma = \tau_1(\tau\sigma)$ не является большой дилатацией. Остается применить индукцию к $T\sigma$.

2.1.6. *Каждая большая дилатация* σ *из* $\boldsymbol{GL_n}(V)$, *для которой* $\operatorname{res}\sigma \geqslant 2$, *представима в виде произведения линейного преобразования с вычетом* 1 *и* $\operatorname{res}\sigma$ *трансвекций, причем меньшего числа трансвекций недостаточно.*

Доказательство. 1) Сначала докажем, что при $n \geqslant 2$ нетривиальное растяжение нельзя представить в виде $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_n$, где $\operatorname{res}\sigma_i = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\det\sigma_i = 1$ для $2 \leqslant i \leqslant n$. Пусть, напротив, такое представление существует. Положим $\sigma_0 = \sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}$. Таким образом, $\sigma = \sigma_0\sigma_n$. В частности, $\operatorname{res}\sigma_0 = n - 1$ и P_0 — прямая. Так как $\operatorname{res}\sigma = n$, то $P_0 \cap P_n = 0$, откуда $V = P_0 \oplus P_n$. Очевидно, $\sigma_0|_{P_0} = 1_{P_0}$. Равенство $\sigma_0 = \sigma\sigma_n^{-1}$ показывает, что $\sigma_0|_{P_n} = \alpha 1_{P_n}$, так что σ_0 — большая дилатация. Следовательно, трансвекция σ_n является произведением $\sigma_n = \sigma_0^{-1}\sigma$ большой дилатации и растяжения. Рассмотрение характеристических корней приводит к противоречию.

2) Теперь докажем, что большую дилатацию σ с $\operatorname{res}\sigma \geqslant 2$ нельзя представить в виде $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_r$, где $\operatorname{res}\sigma = r$, $\operatorname{res}\sigma_i = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant r$ и $\det\sigma_i = 1$ для $2 \leqslant i \leqslant r$. Пусть, напротив, такое представление существует. Тогда ввиду 2.1.2 $P = P_1 \cap \ldots \cap P_r$. В частности, $P \subseteq P_i$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Применяя тильда-отображение, сопровождающее редукцию по модулю P, получим $\tilde\sigma = \tilde\sigma_1 \ldots \tilde\sigma_r$. Мы знаем из 2.1.3, что $\tilde\sigma$ — нетривиальное растяжение r-мерного векторного пространства V/P, где $r \geqslant 2$. Но $\operatorname{res}\tilde\sigma_i \leqslant 1$, поэтому $\operatorname{res}\tilde\sigma_i = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant r$ и $\det\tilde\sigma_i = 1$ для $2 \leqslant i \leqslant r$. Это противоречит пункту 1).

3) Вторая часть предложения следует из пункта 2). Докажем первую часть. Так как $\dim P \leqslant n - 2$, то можно выбрать прямую L и гиперплоскость H так, чтобы было $H \supseteq P + L$, $L \not\subseteq P$. Согласно 1.4.4, существует трансвекция τ с вычетной прямой L и неподвижной гиперплоскостью H. В силу 2.1.4 $\tau\sigma$ не является большой дилатацией. Неподвижное пространство преобразования $\tau\sigma$ содержит P, а потому $\operatorname{res}\tau\sigma \leqslant \operatorname{res}\sigma$, следовательно, либо $\operatorname{res}\tau\sigma = \operatorname{res}\sigma$, либо $\operatorname{res}\tau\sigma = (\operatorname{res}\sigma) - 1$. Ввиду 2.1.5 элемент $\tau\sigma$ является произведением линейного преобразования с вычетом 1 и $(\operatorname{res}\sigma) - 1$ или $(\operatorname{res}\sigma) - 2$ трансвекций, но последнее невозможно в силу второй части нашего предложения и равенства $\sigma = \tau^{-1}(\tau\sigma)$. Следовательно, верно первое, т. е. σ является произведением линейного преобразования с вычетом 1 и $\operatorname{res}\sigma$ трансвекций. Предложение доказано.

2.1.7. Теорема. *Каждое нетривиальное преобразование* σ *из* $\boldsymbol{GL}_n(V)$ *является произведением* $\operatorname{res}\sigma$ *линейных преобразований с вычетом* 1. *Никакое* σ *из* $\boldsymbol{GL}_n(V)$ *не разлагается в произведение менее чем* $\operatorname{res}\sigma$ *линейных преобразований с вычетом* 1.

2.1.8. Теорема. *Каждое нетривиальное преобразование* σ *из* $\boldsymbol{SL}_n(V)$, *не являющееся большой дилатацией, представимо в виде произведения* $\operatorname{res}\sigma$ *трансвекций. Большая дилатация* σ *из* $\boldsymbol{SL}_n(V)$ *представима в виде произведения* $(\operatorname{res}\sigma)+1$ *трансвекций, причем это число нельзя уменьшить. Никакое* σ *из* $\boldsymbol{SL}_n(V)$ *не разлагается в произведение менее чем* $\operatorname{res}\sigma$ *трансвекций.*

§ 2.2. Комментарии

Основной результат этой главы принадлежит Дьёдонне, для других классических групп аналогичные результаты были получены Шерком и Дьёдонне, см. [13]. Общая задача о порождающих множествах матричных групп над кольцами заключается в том, чтобы указать „хорошие“ порождающие множества. Вот типичные вопросы: порождается ли линейная группа над кольцом своими трансвекциями? Какие группы конечно порождены? Ответы на них очень сильно зависят от кольца. Дальнейшие сведения по теории порождения над конкретными кольцами можно найти в обзоре Ю. И. Мерзлякова [23]. Из последующих работ см. [38].

Глава 3. СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ

§ 3.1. Порядки линейных групп

3.1.1. *Если* $n \geqslant 2$ *и поле* F *бесконечно, то группы* $\boldsymbol{GL}_n$, $\boldsymbol{SL}_n$, $\boldsymbol{RL}_n$, $\boldsymbol{GL}_n/\boldsymbol{SL}_n$, $\boldsymbol{PGL}_n$, $\boldsymbol{PSL}_n$ *над* F *также бесконечны.*

Доказательство. Группа $\boldsymbol{SL}_n(F)$ бесконечна, поскольку она содержит все элементарные матрицы $t_{ij}(\lambda)$. Тем более группа $\boldsymbol{GL}_n$ бесконечна. Группы $\boldsymbol{RL}_n$ и $\boldsymbol{GL}_n/\boldsymbol{SL}_n$ бесконечны в силу их изоморфизма группе $\dot{F}$. Ядро $\boldsymbol{SL}_n(F) \cap \boldsymbol{RL}_n(F)$ гомоморфизма $P|_{\boldsymbol{SL}_n}$ изоморфно группе корней n-й степени из единицы в $\dot{F}$ и, следовательно, конечно. Поэтому группа $\boldsymbol{PSL}_n$, а значит и $\boldsymbol{PGL}_n$, бесконечна. Предложение доказано.

3.1.2. Теорема. *Порядок группы* $\boldsymbol{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ *равен*

$$q^{n(n-1)/2} \prod_{1}^{n} (q^i - 1).$$

Порядок групп $\boldsymbol{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ *и* $\boldsymbol{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ *равен*

$$\frac{q^{n(n-1)/2}\prod_1^n (q^i-1)}{q-1}.$$

Порядок группы $\boldsymbol{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ *равен*

$$\frac{q^{n(n-1)/2}\prod_1^n (q^i-1)}{(q-1)\cdot \text{н. о. д.}(q-1, n)}.$$

Доказательство. 1) Докажем индукцией по n первую часть предложения. Для $n=1$ утверждение очевидно. Пусть $n\geqslant 2$. Обозначим через l_n число прямых пространства V. Оно равно числу прямых в V', а значит, числу гиперплоскостей в V. Будем называть гиперплоскость H и прямую L парой, если $V=H\oplus L$. Имеется l_n прямых в V и l_{n-1} в H, поэтому найдется l_n-l_{n-1} пар с заданным H, и, значит, всего имеется $l_n(l_n-l_{n-1})$ пар. Пусть g_n обозначает порядок группы $\boldsymbol{GL}_n(V)$. Легко видеть, что

$$g_n=l_n(l_n-l_{n-1})\,g_1g_{n-1}.$$

Пространство V содержит q^n-1 ненулевых векторов, поэтому существует

$$l_n=\frac{q^n-1}{q-1}$$

различных прямых. По предположению индукции

$$g_n=\frac{q^n-1}{q-1}\,\frac{q^n-q^{n-1}}{q-1}(q-1)\,q^{(n-1)(n-2)/2}\prod_{i=1}^{n-1}(q^i-1)=$$

$$=q^{n(n-1)/2}\prod_{i=1}^{n}(q^i-1),$$

и первая часть предложения доказана.

2) Порядки групп $\boldsymbol{SL}_n$ и $\boldsymbol{PGL}_n$ получаются ввиду изоморфизмов $\boldsymbol{GL}_n/\boldsymbol{SL}_n\simeq \dot F\simeq \boldsymbol{RL}_n$.

3) Так как $\boldsymbol{PSL}_n\simeq \boldsymbol{SL}_n/\boldsymbol{SL}_n\cap\boldsymbol{RL}_n$ и группа $\boldsymbol{SL}_n\cap\boldsymbol{RL}_n$ изоморфна группе корней n-й степени из единицы поля $\mathbb{F}_q$, то достаточно показать, что в $\mathbb{F}_q$ существует ровно d корней n-й степени из единицы, где $d=$ н. о. д. $(q-1, n)$. Очевидно, всякий корень d-й степени является корнем n-й степени. Верно и обратное: если $d=m(q-1)+nr$ и $\xi^n=1$, то

$$\xi^d=(\xi^{q-1})^m(\xi^n)^r=1.$$

Таким образом, мы должны найти число корней d-й степени из единицы в поле $\mathbb{F}_q$, т. е. число корней многочлена x^d-1 в $\mathbb{F}_q$. Всякий его корень является корнем многочлена $x^{q-1}-1$, все корни которого лежат в $\mathbb{F}_q$; значит, x^d-1 разлагается над $\mathbb{F}_q$ на линейные множители. Так как многочлен x^d-1 взаимно прост со своей производной, то он не может иметь кратных корней, поэтому в $\mathbb{F}_q$ существует ровно d корней d-й степени из единицы.

§ 3.2. Центры

Заметим, что при $n \geqslant 2$ группа $\boldsymbol{PSL}_n$ и, следовательно, $\boldsymbol{SL}_n$ неабелева — достаточно взять подходящие проективные трансвекции σ_1 и σ_2 с различными вычетными прямыми и применить 1.6.4.

3.2.1. 1) *Централизатор подгруппы* $\boldsymbol{PSL}_n$ *в* $\boldsymbol{PGL}_n$ *тривиален.*

2) *Централизатором подгруппы* $\boldsymbol{SL}_n$ *в* $\boldsymbol{GL}_n$ *является* $\boldsymbol{RL}_n$.

3) *Группы* $\boldsymbol{PGL}_n$ *и* $\boldsymbol{PSL}_n$ *не имеют центра.*

4) $\operatorname{cen} \boldsymbol{GL}_n = \boldsymbol{RL}_n$, $\operatorname{cen} \boldsymbol{SL}_n = \boldsymbol{SL}_n \cap \boldsymbol{RL}_n$.

Доказательство. Допустим, что некоторое σ из $\boldsymbol{PGL}_n$ перестановочно со всеми элементами из $\boldsymbol{PSL}_n$. Докажем, что $\sigma=1$. Пусть L — произвольная прямая пространства V. Возьмем неединичную проективную трансвекцию τ с вычетной прямой L. Согласно § 1.6, вычетной прямой проективной трансвекции $\sigma\tau\sigma^{-1}$ является σL. Но $\sigma\tau\sigma^{-1}=\tau$. Следовательно, $\sigma L = L$ для всех прямых L из V. Отсюда ввиду 1.1.2 $\sigma=1$. Тем самым доказано 1). Теперь 2) и 3) следуют из 1), а 4) следует из 2).

§ 3.3. Коммутанты

3.3.1. *Любые две неединичные трансвекции на V сопряжены относительно* $\boldsymbol{GL}_n$ *при произвольном n и относительно* $\boldsymbol{SL}_n$ *при* $n \geqslant 3$.

Доказательство. Будем предполагать, что $n \geqslant 2$. Запишем данные трансвекции в виде $\tau_{a,\rho}$ и $\tau_{a',\rho'}$, где $\rho a = \rho' a' = 0$. Возьмем базу $x_1, \ldots, x_n$ пространства V, в которой $x_1 = a$ и

$$\rho x_1 = \ldots = \rho x_{n-1} = 0, \ \rho x_n = 1;$$

аналогично, возьмем базу $x_1', \ldots, x_n'$, где $x_1' = a'$ и

$$\rho' x_1' = \ldots = \rho' x_{n-1}' = 0, \quad \rho' x_n' = 1.$$

Возьмем преобразование σ из $\boldsymbol{GL}_n(V)$, для которого $\sigma x_i = x'_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $\sigma a = a'$ и $\rho\sigma^{-1} = \rho'$, поэтому

$$\sigma\tau_{a,\rho}\sigma^{-1} = \tau_{\sigma a, \rho\sigma^{-1}} = \tau_{a', \rho'}.$$

Если $n \geqslant 3$, то определим σ, полагая $\sigma x_i = x'_i$ при $i \neq 2$ и $\sigma x_2 = \lambda x'_2$, где λ выбрано так, что $\det \sigma = 1$.

3.3.2. *Если L и L' — две произвольные прямые в V, то множество трансвекций с вычетной прямой L и множество трансвекций с вычетной прямой L' сопряжены относительно $\boldsymbol{SL}_n$.*

Доказательство. Можно считать, что $n \geqslant 2$. В группе $\boldsymbol{SL}_n$ существует такой элемент Σ, что $\Sigma L = L'$. Указанные множества сопряжены посредством Σ.

3.3.3. *Всегда $\boldsymbol{SL}_n = D\boldsymbol{GL}_n = D\boldsymbol{SL}_n$, кроме следующих двух исключений:*

$$\boldsymbol{SL}_2(\mathbb{F}_3) = D\boldsymbol{GL}_2(\mathbb{F}_3) \supset D\boldsymbol{SL}_2(\mathbb{F}_3),$$

$$\boldsymbol{SL}_2(\mathbb{F}_2) \supset D\boldsymbol{GL}_2(\mathbb{F}_2) = D\boldsymbol{SL}_2(\mathbb{F}_2).$$

При $n > 1$ во всех случаях $D\boldsymbol{SL}_n \supset \boldsymbol{SL}_n \cap \boldsymbol{RL}_n$.

Доказательство. Можно считать, что $n \geqslant 2$. Заметим, что во всех случаях $\boldsymbol{SL}_n \supseteq D\boldsymbol{GL}_n \supseteq D\boldsymbol{SL}_n$.

1) Если $n \geqslant 3$, то для двух различных индексов i, j можно найти третий индекс k, отличный от i и j. Из § 1.5 получаем, что

$$t_{ij}(\lambda) = [t_{ik}(\lambda), t_{kj}(1)] \in D\boldsymbol{SL}_n,$$

следовательно, все элементарные матрицы принадлежат группе $D\boldsymbol{SL}_n$. По теореме 2.1.1 $\boldsymbol{SL}_n \subseteq D\boldsymbol{SL}_n$, откуда $\boldsymbol{SL}_n = D\boldsymbol{GL}_n = D\boldsymbol{SL}_n$.

2) Допустим, что $n = 2$ и $\operatorname{card} F \geqslant 4$. Найдется такое λ из $\dot{F}$, что $\lambda^2 \neq 1$. Для любого μ из F

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mu(\lambda^2 - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому $t_{12}(F) \subseteq D\boldsymbol{SL}_2$. Аналогично, $t_{21}(F) \subseteq D\boldsymbol{SL}_2$. Дальнейшее очевидно.

3) Пусть теперь $n = 2$ и $F = \mathbb{F}_3$. Равенство $\boldsymbol{SL}_2 = D\boldsymbol{GL}_2$ доказывается так же, как в пункте 2), только вместо матрицы $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ надо взять $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\lambda \neq 0, 1$.

Пусть по определению

$$G = \pm\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Легко видеть, что G — нормальная подгруппа в $\boldsymbol{SL}_2$. (Достаточно проверить инвариантность G относительно сопряжений элементарными матрицами.) По теореме 3.1.2 группа $\boldsymbol{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ имеет порядок 24, следовательно, факторгруппа $\boldsymbol{SL}_2/G$ имеет порядок 3, а потому абелева. Значит, $D\boldsymbol{SL}_2 \subseteq G$. Подходящими подстановками в равенстве

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \mu & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \mu & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1+\lambda\mu+\lambda^2\mu^2 & -\lambda^2\mu\\ \lambda\mu^2 & 1-\lambda\mu\end{pmatrix}$$

легко показать, что $D\boldsymbol{SL}_2 = G$.

4) Наконец, пусть $n=2$ и $F=\mathbb{F}_2$. Ясно, что $\boldsymbol{GL}_2 = \boldsymbol{SL}_2$, откуда $D\boldsymbol{GL}_2 = D\boldsymbol{SL}_2$. Пусть по определению

$$G = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

Тогда G — подгруппа в $\boldsymbol{SL}_2$. По теореме 3.1.2 порядок группы $\boldsymbol{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ равен 6. Следовательно, G — нормальная подгруппа индекса 2 в $\boldsymbol{SL}_2$. Так как факторгруппа $\boldsymbol{SL}_2/G$ абелева, то $D\boldsymbol{SL}_2 \subseteq G$. Из § 3.2 следует, что группа $\boldsymbol{SL}_2$ неабелева, поэтому $D\boldsymbol{SL}_2 = G$.

3.3.4. *Имеем* $\boldsymbol{PSL}_n = D\boldsymbol{PGL}_n = D\boldsymbol{PSL}_n$, *кроме двух следующих исключений*:

$$\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_3) = D\boldsymbol{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \supset D\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_3),$$
$$\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \supset D\boldsymbol{PGL}_2(\mathbb{F}_2) = D\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_2).$$

Во всех случаях при $n > 1$ *имеем* $D\boldsymbol{PSL}_n \neq 1$.

Доказательство. Применить предложение 3.3.3, учитывая теоремы о гомоморфизмах и равенство $f(DG) = D(fG)$, справедливое для любого гомоморфизма f группы G.

§ 3.4. Теоремы о простоте

3.4.1. Теорема. *Для любого натурального* $n \geqslant 2$ *и любого поля* F *группа* $\boldsymbol{PSL}_n(F)$ *проста, за исключением двух случаев*: $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ *и* $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$.

Доказательство. Тот факт, что группы $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ и $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$ не просты, следует из 3.3.4, поэтому будем предполагать, что либо $n \geqslant 3$, либо $n=2$ и $\operatorname{card} F \geqslant 4$. Вместо проективной группы мы будем иметь дело с группой $\boldsymbol{SL}_n$.

Достаточно рассмотреть нормальную подгруппу G группы $\mathbf{SL}_n$, не лежащую в $\mathbf{RL}_n$, и доказать, что $G = \mathbf{SL}_n$.

1) Сначала предположим, что $n \geqslant 3$. Мы проведем доказательство, оперируя только с элементами группы линейных преобразований $\mathbf{SL}_n = \mathbf{SL}_n(V)$. Если удастся найти в G хотя бы одну неединичную трансвекцию, то и все трансвекции в силу 3.3.1 будут лежать в G, откуда по теореме 2.1.1 получим $G = \mathbf{SL}_n$. Пусть $\Sigma \in G$, $\Sigma \notin \mathbf{RL}_n$. Тогда $\Sigma \notin \operatorname{cen} \mathbf{SL}_n$, следовательно, существует такая трансвекция T из $\mathbf{SL}_n$, что $\Sigma T \neq T\Sigma$. Положим $\sigma = \Sigma T \Sigma^{-1} T^{-1} \neq 1_V$. Из равенства

$$\sigma = \Sigma \left(T \Sigma^{-1} T^{-1}\right) = \left(\Sigma T \Sigma^{-1}\right) T^{-1}$$

следует, что $\sigma \in G$ и $\operatorname{res} \sigma \leqslant 2$. Таким образом, описанная процедура, которую мы назовем *первым трюком для доказательства простоты*, позволяет найти в группе G элемент σ с вычетом 1 или 2. Если $\operatorname{res} \sigma = 1$, то все доказано. Пусть $\operatorname{res} \sigma = 2$. Опишем теперь вторую процедуру — *второй трюк для доказательства простоты*, в результате которой элемент σ с вычетом 2 заменяется элементом с вычетом 1. Так как $\operatorname{res} \sigma = 2$, то найдется гиперплоскость H пространства V, содержащая R. Снова используя то, что $\operatorname{res} \sigma = 2$, найдем такой вектор a из H, для которого $\sigma a \neq a$. Пусть ρ — нетривиальный линейный функционал и $\rho H = 0$. Тогда

$$\rho(\sigma^{-1} x - x) \in \rho R \subseteq \rho H = 0$$

для всех x из V, поэтому $\rho \sigma^{-1} = \rho$. Следовательно, группа G содержит элемент

$$\sigma \left(\tau_{a,\rho} \sigma^{-1} \tau_{a,\rho}^{-1}\right) = \left(\sigma \tau_{a,\rho} \sigma^{-1}\right) \tau_{a,\rho}^{-1} = \tau_{\sigma a,\, \rho\sigma^{-1}} \tau_{-a,\rho} = \tau_{\sigma a - a,\, \rho},$$

который является нетривиальной трансвекцией. Для $n \geqslant 3$ доказательство закончено.

2) Теперь пусть $n = 2$. Так как $G \neq \mathbf{RL}_2$, то хотя бы один элемент σ из G перемещает некоторую прямую. Возьмем вектор x, коллинеарный этой прямой. Векторы x и σx составляют базу пространства V. Матрица преобразования σ в этой базе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

для некоторого α из F. Используя указанную базу, перейдем от группы линейных преобразований $\mathbf{SL}_2(V)$ к группе матриц $\mathbf{SL}_2(F) = \mathbf{SL}_2$. Тогда $G \triangleleft \mathbf{SL}_2$ и

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \in G \qquad (1)$$

для некоторого α из F. Нужно доказать, что $G = SL_2$. Рассмотрим произвольные λ из $\dot{F}$ и μ из F. В силу нормальности группы G матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}^{-1}$$

лежит в G, т. е.

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-2} & 0 \\ \alpha(\lambda^2-1) & \lambda^2 \end{pmatrix} \in G. \tag{2}$$

Снова ввиду нормальности G матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^{-2} & 0 \\ \alpha(\lambda^2-1) & \lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \lambda^{-2} & 0 \\ \alpha(\lambda^2-1) & \lambda^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

лежит в G, т. е.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu(1-\lambda^4) & 1 \end{pmatrix} \in G. \tag{3}$$

Сопрягая (3) матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем, что

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mu(1-\lambda^4) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G. \tag{4}$$

Если $F \neq \mathbb{F}_5$, то либо $\operatorname{card} F > 5$, либо $\operatorname{card} F = 4$, а потому существует такое λ из F, что $\lambda^4 \neq 1$, т. е. $\lambda^4 - 1 \neq 0$. Так как μ произвольно, то ввиду (3), (4) все элементарные матрицы лежат в G и $G = SL_2$. Пусть поэтому $F = \mathbb{F}_5$. Если в соотношении (1) $\alpha = 0$, то, сопрягая его матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим, что

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in G.$$

Далее,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \in G.$$

Если $\alpha \neq 0$, то ввиду (2) матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3\alpha & 4 \end{pmatrix},$$

а потому и ее квадрат

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

лежат в G. Так или иначе, матрица $t_{21}(\beta)$ лежит в G для некоторого β из $\dot{F}$. Возводя в квадрат, куб и 4-ю степень, получим, что $t_{21}(F) \subseteq G$. После сопряжения матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

получим еще включение $t_{12}(F) \subseteq G$. Предложение полностью доказано.

3.4.2. *Пусть X — подгруппа группы $\boldsymbol{PGL}_n$. Если X инвариантна относительно сопряжения элементами из $\boldsymbol{PSL}_n$, то $X = 1$ или $X \supseteq \boldsymbol{PSL}_n$, за исключением двух случаев, когда $n = 2$ и $F = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$.*

Доказательство. Допустим, что $X \neq 1$. Пусть σ — неединичный элемент из X. Ввиду 3.2.1 он не содержится в централизаторе группы $\boldsymbol{PSL}_n$, которая порождена проективными трансвекциями, поэтому в $\boldsymbol{PSL}_n$ существует проективная трансвекция τ, для которой $\sigma\tau \neq \tau\sigma$. Таким образом, $\sigma(\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) = (\sigma\tau\sigma^{-1})\tau^{-1}$ — неединичный элемент из $X \cap \boldsymbol{PSL}_n$ и, значит, $1 \subset X \cap \boldsymbol{PSL}_n \lhd \boldsymbol{PSL}_n$. Остается применить 3.4.1.

3.4.3. *Пусть X — подгруппа группы $\boldsymbol{GL}_n$. Если X инвариантна относительно сопряжений элементами из $\boldsymbol{SL}_n$, то $X \subseteq \boldsymbol{RL}_n$ или $X \supseteq \boldsymbol{SL}_n$, за исключением двух случаев, когда $n = 2$ и $F = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$.*

Доказательство. По поводу исключений см. 3.3.3. Далее, применяя 3.4.2 к PX, получим, что $X \subseteq \boldsymbol{RL}_n$ или $X \cdot \boldsymbol{RL}_n \supseteq \boldsymbol{SL}_n$. Допустим последнее. Тогда

$$X \supseteq DX = D(X \cdot \boldsymbol{RL}_n) \supseteq D\boldsymbol{SL}_n = \boldsymbol{SL}_n.$$

§ 3.5. Другой подход к простоте

Пусть A — непустое множество, G — группа подстановок множества A, т. е. подгруппа группы всех подстановок множества A. Напомним, что G называется *k-кратно транзитивной*

(k — натуральное число $\leqslant \operatorname{card} A$), если для любых двух наборов $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_k$ различных элементов из A существует такая подстановка σ из G, что $\sigma a_i = b_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Группа называется *транзитивной*, если она однократно транзитивна. Ясно, что из k-кратной транзитивности следует $(k-1)$-кратная.

Напомним, что *разбиением* множества A называется множество $\mathscr{P}$ попарно не пересекающихся подмножеств, объединение которых равно A. Тривиальными называются два разбиения, состоящие из самого A и из всех его элементов. Транзитивная группа подстановок множества A называется *импримитивной*, если существует такое нетривиальное разбиение $\mathscr{P}$ множества A, что $\sigma X \in \mathscr{P}$ для всех $\sigma \in G$, $X \in \mathscr{P}$. В противном случае группа называется *примитивной*.

3.5.1. *При $k \geqslant 2$ всякая k-кратно транзитивная группа примитивна.*

Доказательство очевидно.

3.5.2. *Всякая нетривиальная нормальная подгруппа примитивной группы подстановок транзитивна.*

Доказательство. Пусть G — группа подстановок множества A и $N \triangleleft G$. Очевидно, $Nx = Ny$ или $Nx \cap Ny = \varnothing$ для любых x, y из A. Если определить $\mathscr{P}$ как множество таких подмножеств X множества A, что

$$X \in \mathscr{P} \Leftrightarrow X = Nx \text{ для некоторого } x \text{ из } A,$$

то, как легко видеть, оно будет разбиением множества A. Для любых $\sigma \in G$, $X \in \mathscr{P}$ из нормальности N следует, что

$$\sigma X = \sigma(Nx) = N(\sigma x) \in \mathscr{P}.$$

В силу примитивности $\mathscr{P}$ тривиально. Так как $\operatorname{card} N \geqslant 2$, то $\operatorname{card} Nx \geqslant 2$ для некоторого x из A. Тогда $Nx = A$ для всех x из A, т. е. группа N транзитивна.

3.5.3. *Если T — транзитивная подгруппа группы подстановок G множества A, то $G = T \cdot S_a$ для каждого $a \in A$, где S_a — стабилизатор элемента a в G.*

Доказательство. Для всякой подстановки g из G найдется такое t из T, что $ga = ta$. Отсюда $t^{-1}g \in S_a$.

3.5.4. *Примитивная группа подстановок G множества A проста, если выполнены следующие условия:*

1) $DG = G$,

2) *для некоторого a из A стабилизатор S_a содержит такую нормальную абелеву подгруппу H_a, что*

$$G = \langle gH_ag^{-1} \mid g \in G\rangle.$$

Доказательство. Мы должны рассмотреть произвольную нормальную подгруппу N группы G, отличную от тривиальной, и доказать, что $N = G$.

1) Сначала докажем, что $G = N \cdot H_a$. Рассмотрим произвольный элемент g из G. По условию он представим в виде

$$g = \prod_{i=1}^{t} g_i h_i g_i^{-1}, \quad g_i \in G, \quad h_i \in H_a.$$

Ввиду 3.5.2 и 3.5.3 можно записать $g_i = n_i s_i$, где $n_i \in N$, $s_i \in S_a$. Так как $H_a \lhd S_a$, то найдутся такие $k_i \in H_a$, что

$$g = \prod_{i=1}^{t} n_i k_i n_i^{-1}.$$

Теперь индукцией по t легко показать, что $g \in N \cdot H_a$.

2) Согласно предыдущему, всякий коммутатор из G имеет вид

$$(nh)(n_*h_*)(nh)^{-1}(n_*h_*)^{-1} = nhn_*h_*h^{-1}n^{-1}h_*^{-1}n_*^{-1} = \\ = n(hn_*h^{-1})(h_*n^{-1}h_*^{-1})n_*^{-1},$$

а потому содержится в N. Следовательно, $G = DG \subseteq N \subseteq G$. Предложение доказано.

Используя этот результат, дадим второе доказательство теоремы 3.4.1. Зафиксируем прямую L из $P^1(V)$ и определим подгруппы H_L и S_L группы $\boldsymbol{PSL}_n$ следующим образом: H_L состоит из единицы группы $\boldsymbol{PSL}_n$ и всех проективных трансвекций с вычетной прямой L,

$$S_L = \{\sigma \in \boldsymbol{PSL}_n \mid \sigma L = L\}.$$

Ясно, что S_L — стабилизатор прямой L в $\boldsymbol{PSL}_n$, а H_L — нормальная абелева подгруппа в S_L. Ввиду 3.3.2

$$\boldsymbol{PSL}_n = \langle \sigma H_L \sigma^{-1} \mid \sigma \in \boldsymbol{PSL}_n\rangle,$$

а ввиду 3.3.4 имеем $D\boldsymbol{PSL}_n = \boldsymbol{PSL}_n$. В силу 1.1.2 группа $\boldsymbol{PSL}_n$ точно действует на $P^1(V)$, поэтому она изоморфна группе подстановок множества $P^1(V)$. Легко видеть, что эта группа дважды транзитивна, поэтому по 3.5.1 она примитивна. Остается применить 3.5.4.

§ 3.6. Комментарии

Простота групп PSL_n была доказана в несколько этапов — для конечных полей, бесконечных полей характеристики $\neq 2$, совершенных полей характеристики 2, любых бесконечных полей и, наконец, тел — Жорданом, Бернсайдом, Диксоном, Ивасавой, Абе, Дьёдонне и Хуа Ло-геном в 1870—1949 гг. Дополнительные сведения, а также теоремы о простоте для других классических групп можно найти в книге Дьёдонне [14]. В работе [9] Шевалле ввел группы, позднее названные его именем, и доказал — при некоторых условиях, — что они просты. В дальнейшем оказалось, что почти все простые группы Шевалле являются классическими группами (это установил Ри), а среди исключительных групп обнаружились — после полувекового перерыва — новые конечные простые группы. Наконец, Титс [36] доказал теоремы о простоте для классических групп и групп Шевалле с общих позиций теории алгебраических групп. При переходе от полей к кольцам надежды на простоту уже не остается, так как, например, общая линейная группа над кольцом целых чисел содержит бесконечное семейство конгруэнц-подгрупп, которые, очевидно, нормальны. По этой причине основным вопросом структурной теории над кольцами является уже не вопрос о простоте, а вопрос об описании всех нормальных подгрупп — обычно в терминах конгруэнц-подгрупп. По поводу структурной теории матричных групп над кольцами см. обзор Ю. И. Мерзлякова [23].

Глава 4. КОЛЛИНЕАЦИИ И ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 4.1. Полулинейная алгебра

Рассмотрим изоморфизм полей $\mu\colon F \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow F_1$. Будем обозначать через α^μ образ элемента α из F при изоморфизме μ. Следовательно,

$$(\alpha+\beta)^\mu = \alpha^\mu + \beta^\mu, \quad (\alpha\beta)^\mu = \alpha^\mu\beta^\mu.$$

Если $\mu_1\colon F_1 \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow F_2$ — другой изоморфизм, то

$$(\alpha^\mu)^{\mu_1} = \alpha^{\mu\mu_1}.$$

Отображение $k\colon V \to V_1$ называется *полулинейным* относительно $\mu\colon F \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow F_1$, если

$$k(x+y) = kx + ky, \quad k(\alpha x) = \alpha^\mu (kx)$$

для всех x, y из V и α из F. Отображение $k\colon V \to V_1$ называется *полулинейным*, если оно полулинейно относительно некоторого μ. Если $k \neq 0$, то ассоциированный изоморфизм μ единствен. Пусть отображение $k\colon V \to V_1$ полулинейно относительно $\mu\colon F \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow F_1$, а отображение $k_1\colon V_1 \to V_2$ полулинейно относительно $\mu_1\colon F_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow F_2$, тогда $k_1 k\colon V \to V_2$ полулинейно относительно $\mu_1\mu$. Пусть $k\colon V \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow V_1$ — взаимно однозначное отображение на. Если оно полулинейно относительно $\mu\colon F \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow F_1$, то $k^{-1}\colon V_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow V$ полулинейно относительно $\mu^{-1}\colon F_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow F$.

Предположим, что задан изоморфизм $\mu\colon F \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow F_1$. Существует естественный способ превращения пространства V_1 в F-пространство, а именно положим

$$\alpha z = \alpha^{\mu} z \quad \text{для всех} \quad \alpha \in F, \quad z \in V_1.$$

Заметим, что

1) $\dim_F V_1 = \dim_{F_1} V_1$,

2) множество U_1 тогда и только тогда является F_1-подпространством пространства V_1, когда оно является F-подпространством пространства V_1,

3) отображение $k\colon V \to V_1$ пространства V в F_1-пространство V_1 тогда и только тогда полулинейно относительно μ, когда оно линейно как отображение пространства V в F-пространство V_1.

Это позволяет переносить результаты из линейной алгебры в полулинейную. В частности, справедливы следующие два предложения:

4.1.1. *Пусть $k\colon V \to V_1$ — полулинейное отображение, а W W_1 — подпространства пространств V и V_1 соответственно Тогда*

1) *kW — подпространство в V_1,*

2) *$k^{-1}W_1$ — подпространство в V,*

3) $\dim_{F_1} kV + \dim_F k^{-1}0 = \dim_F V$.

4.1.2. *Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — база пространства V и $v_1, \ldots, v_n$ — произвольные n векторов из V_1. Для всякого изоморфизма полей $\mu\colon F \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow F_1$ существует единственное полулинейное относительно μ отображение $k\colon V \to V_1$, переводящее x_i в v_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Определяющим равенством для него является*

$$k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\mu} v_i.$$

Изоморфизм полей очевидным образом переносится на матрицы: если $A = (a_{ij})$ — матрица размера $p \times q$ над F, то пусть A^{μ} обозначает матрицу (a_{ij}^{μ}) размера $p \times q$ над F_1.

При естественных ограничениях на число строк и столбцов имеем

$$(A+B)^{\mu}=A^{\mu}+B^{\mu},\quad (AB)^{\mu}=A^{\mu}B^{\mu},$$

$$\det A^{\mu}=(\det A)^{\mu},\quad \left(A^{-1}\right)^{\mu}=\left(A^{\mu}\right)^{-1}.$$

Последнее равенство означает, что матрица A тогда и только тогда обратима над F, когда матрица A^{μ} обратима над F_1, и в этом случае $\left(A^{-1}\right)^{\mu}=\left(A^{\mu}\right)^{-1}$. Для композиции изоморфизмов полей имеем

$$\left(A^{\mu}\right)^{\mu_1}=A^{\mu_1\mu}.$$

Если k: $V\to V_1$ — полулинейное относительно μ: $F\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow F_1$ отображение и зафиксированы базы $\mathfrak{X}=\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\mathfrak{X}_1=\{y_1, \ldots, y_n\}$ пространств V и V_1 соответственно, то каждый элемент kx_j можно представить в виде

$$kx_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}y_i \qquad (a_{ij}\in F_1).$$

Полученная матрица $A=(a_{ij})$ размера $n_1\times n$ над F_1 называется *матрицей отображения* k относительно пары баз $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$. Пусть k_1: $V_1\to V_2$ полулинейно относительно μ_1: $F_1\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow F_2$ и зафиксированы базы $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, тогда, как легко видеть, $A_1A^{\mu_1}$ будет матрицей отображения k_1k относительно баз $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_2$. Если V_1 рассматривать естественным образом как F-пространство, то матрицей отображения k в смысле линейной алгебры будет матрица $A^{\mu^{-1}}$, где A — матрица отображения k в смысле полулинейной алгебры. В частности,

$$k \text{ взаимно однозначно и на } \Leftrightarrow A^{\mu^{-1}} \text{ обратима } \Leftrightarrow A \text{ обратима.}$$

Если k обратимо, то матрицей отображения k^{-1} относительно баз $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}$ будет матрица $\left(A^{-1}\right)^{\mu^{-1}}$.

Все это справедливо в случае, когда $F=F_1$, $V=V_1$, $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1$ и μ: $F\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow F$ — автоморфизм поля F. Тогда матрица $A=(a_{ij})$ порядка n над F называется *матрицей отображения* k относительно базы $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{Z}=\{z_1, \ldots, z_n\}$ — другая база пространства V, связанная с первой базой матрицей перехода $T=(t_{ij})$, т. е.

$$z_j=\sum_{i=1}^{n}t_{ij}x_i,$$

и если B — матрица отображения k относительно базы $\mathfrak{Z}$, то

$$B=T^{-1}AT^{\mu}$$

Вопрос. Существует ли нетождественное полулинейное взаимно однозначное отображение пространства V на себя, матрица которого единична в некоторой базе пространства V?

Коллинеацией k пространства V на пространство V_1 называется полулинейное взаимно однозначное отображение $k\colon V \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow V_1$ пространства V на пространство V_1. Множество коллинеаций замкнуто относительно композиции и обращения. В силу 4.1.1 k — коллинеация $\Rightarrow \bar{k}$ — геометрическое преобразование. В частности, можно взять $\bar{k}$ для произвольной коллинеации k и получить проективность, даже проективное геометрическое преобразование $\bar{k}\colon P(V) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow P(V_1)$ пространства V на пространство V_1. Проективность $\pi\colon P(V) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow P(V_1)$ вида $\pi = \bar{k}$ для некоторой коллинеации $k\colon V \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow V_1$ называется *проективной коллинеацией* пространства V на пространство V_1. Ясно, что множество проективных коллинеаций замкнуто относительно композиции и обращения. Если π — проективная коллинеация, то π — проективное геометрическое преобразование.

§ 4.2. Основная теорема проективной геометрии

4.2.1. *Пусть π — взаимно однозначное отображение множества прямых пространства V на множество прямых пространства V_1, т. е. $\pi\colon P^1(V) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow P^1(V_1)$. Если*

$$L_1 \subseteq L_2 + L_3 \Leftrightarrow \pi L_1 \subseteq \pi L_2 + \pi L_3$$

для всех L_1, L_2, L_3 из $P^1(V)$, то π единственным образом продолжается до проективности $\Pi\colon P(V) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow P(V_1)$.

Доказательство. Единственность следует из 1.1.2. Докажем существование. Легко проверить индукцией по r, что

$$L \subseteq L_1 + \ldots + L_r \Leftrightarrow \pi L \subseteq \pi L_1 + \ldots + \pi L_r.$$

Положим $\Pi 0 = 0$. Произвольное ненулевое подпространство U из $P(V)$ разложим в сумму прямых

$$U = L_1 + \ldots + L_r$$

и положим

$$\Pi U = \pi L_1 + \ldots + \pi L_r.$$

Ясно, что Π — корректно определенное взаимно однозначное отображение множества $P(V)$ на множество $P(V_1)$, сохраняющее порядок и индуцирующее π на прямых.

4.2.2. *Пусть* π: $P(V) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow P(V_1)$ — *такое взаимно однозначное отображение на, что*

$$U \subseteq W \Rightarrow \pi U \subseteq \pi W.$$

Если $\dim_F V = \dim_{F_1} V_1$, *то* π — *проективность.*

Доказательство. Включив произвольное подпространство пространства V в строго возрастающую цепочку из $n+1$ подпространств, мы видим, что π сохраняет размерность. Докажем, что

$$\pi U \subseteq \pi W \Rightarrow U \subseteq W.$$

Пусть $\pi W = \pi U \oplus \pi T$. Тогда

$$\pi(U \cap T) \subseteq \pi U \cap \pi T = 0.$$

Следовательно, $U \cap T = 0$, $U + T = U \oplus T$ и

$$\pi(U \oplus T) \supsetneqq \pi U \oplus \pi T = \pi W.$$

Из размерностных соображений $\pi(U \oplus T) = \pi W$, откуда $U \subseteq U \oplus T = W$.

4.2.3. *Пусть* π — *взаимно однозначное отображение множества прямых пространства* V *на множество прямых пространства* V_1. *Предположим, что* $\dim_F V = \dim_{F_1} V_1$ *и*

$$L_1 \subseteq L_2 + L_3 \Rightarrow \pi L_1 \subseteq \pi L_2 + \pi L_3.$$

Тогда π *можно однозначно продолжить до проективности* Π: $P(V) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow P(V_1)$.

Доказательство. 1) По индукции

$$L \subseteq L_1 + \ldots + L_r \Rightarrow \pi L \subseteq \pi L_1 + \ldots + \pi L_r,$$

поэтому

$$V = L_1 + \ldots + L_n \Rightarrow V_1 = \pi L_1 + \ldots + \pi L_n.$$

Следовательно,

$$L_1, \ldots, L_r \text{ независимы } \Rightarrow \pi L_1, \ldots, \pi L_r \text{ независимы.}$$

2) Положим $\Pi 0 = 0$. Произвольное подпространство $U \neq 0$ из $P(V)$ разложим в сумму

$$U = L_1 + \ldots + L_r$$

и положим

$$\Pi U = \pi L_1 + \ldots + \pi L_r.$$

В силу 1) Π — корректно определенное продолжение отображения π на $P(V)$. Очевидно, Π сохраняет $+$ и dim. Легко проверяется, что Π — отображение *на* и

$$U \subseteq W \Rightarrow \Pi U \subseteq \Pi W.$$

Ввиду 4.2.2 остается доказать взаимную однозначность этого отображения, т. е. что из $\Pi U = \Pi W$ следует $U = W$. Достаточно показать, что из $\Pi L \subseteq \Pi W$ следует $L \subseteq W$. Но это действительно так, поскольку

$$\dim (W + L) = \dim \Pi (W + L) = \dim (\Pi W + \Pi L) = \\ = \dim \Pi W = \dim W.$$

4.2.4. *Пусть π — взаимно однозначное отображение множества прямых пространства V на множество прямых пространства V_1 и $\dim_F V = \dim_{F_1} V_1$. Если существует такое фиксированное p $(2 \leqslant p \leqslant n - 1)$, что для каждого p-мерного подпространства U пространства V все прямые πL (где $L \subseteq U$) попадают в некоторое p-мерное подпространство пространства V_1, то π можно единственным образом продолжить до проективности*

$$\Pi\colon\ P(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow P(V_1).$$

Доказательство. 1) Если $p = 2$, то утверждение легко следует из 4.2.3. Пусть $3 \leqslant p \leqslant n - 1$. Мы будем доказывать, что аналогичное свойство имеет место для $p - 1$ и, значит, в конечном счете для $p = 2$, чем все будет доказано.

2) Для произвольного подпространства X пространства V обозначим через X_* подпространство пространства V_1, порожденное прямыми πL, $L \subseteq X$. Ясно, что

$$\dim X \leqslant p \Rightarrow \dim X_* \leqslant p.$$

Нужно показать, что

$$\dim U = p - 1 \Rightarrow \dim U_* \leqslant p - 1.$$

Пусть, напротив, существует такое подпространство U размерности $p - 1$, что $\dim U_* = p$. Возьмем прямую $K \subseteq V$, для которой $K_* \nsubseteq U_*$. Тогда $K \nsubseteq U$, $\dim (K + U) = p$ и, значит,

$$\dim (K + U)_* \geqslant \dim (K_* + U_*) = p + 1.$$

Противоречие.

4.2.5. Теорема. *Если $\dim_F V \geqslant 3$, то всякая проективность пространства V на пространство V_1 является проективной коллинеацией.*

Доказательство. 1) Для произвольных a из $\dot{V}$ и a' из $\dot{V}_1$ будем обозначать через $\langle a\rangle$ и $\langle a'\rangle$ прямые Fa и Fa' соответственно. Пусть задана проективность $\pi\colon P(V)\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow P(V_1)$ пространства V на V_1. Зафиксируем базу $x_1, \ldots, x_n$ пространства V. Очевидно, существует такая база $x'_1, \ldots, x'_n$ пространства V_1, что

$$\pi\langle x_i\rangle=\langle x'_i\rangle,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$
$$\pi\langle x_1+x_i\rangle=\langle x'_1+x'_i\rangle,\quad 2\leqslant i\leqslant n.$$

2) Так как π — проективность, то каждый элемент α из F определяет такой элемент α' из F_1, что $\pi\langle x_1+\alpha x_2\rangle=\langle x'_1+\alpha' x'_2\rangle$. Ясно, что $0=0'$, $1=1'$ и из $\alpha'=\beta'$ следует $\alpha=\beta$. Таким образом, мы имеем взаимно однозначное отображение (очевидно, *на*)

$$'\colon F\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow F_1.$$

3) Докажем, что $\pi\langle x_1+\alpha x_i\rangle=\langle x'_1+\alpha' x'_i\rangle$ для $2\leqslant i\leqslant n$. В силу 2) существует такое отображение $\tilde{}\colon F\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow F_1$, что $\pi\langle x_1+\alpha x_i\rangle=\langle x'_1+\tilde{\alpha} x'_i\rangle$, $\tilde{0}=0$ и $\tilde{1}=1$. Далее,

$$\langle\alpha x_2-\alpha x_i\rangle\subseteq\begin{cases}\langle x_2\rangle+\langle x_i\rangle,\\ \langle x_1+\alpha x_2\rangle+\langle x_1+\alpha x_i\rangle,\end{cases}$$

поэтому

$$\pi\langle\alpha x_2-\alpha x_i\rangle\subseteq\begin{cases}\langle x'_2\rangle+\langle x'_i\rangle,\\ \langle x'_1+\alpha' x'_2\rangle+\langle x'_1+\tilde{\alpha} x'_i\rangle.\end{cases}$$

Отсюда $\pi\langle\alpha x_2-\alpha x_i\rangle=\langle\alpha' x'_2-\tilde{\alpha} x'_i\rangle$. В частности, $\pi\langle x_2-x_i\rangle=$ $=\langle x'_2-x'_i\rangle$. Но $\pi\langle\alpha x_2-\alpha x_i\rangle=\pi\langle x_2-x_i\rangle$, значит, $\alpha'=\tilde{\alpha}$.

4) Заметим, что

$$\pi\langle x_1+\alpha_2x_2+\ \ldots\ +\alpha_nx_n\rangle=\langle x'_1+\alpha'_2x'_2+\ \ldots\ +\alpha'_nx'_n\rangle.$$

В самом деле,

$$\pi\langle x_1+\alpha_2x_2+\ \ldots\ +\alpha_nx_n\rangle=\langle x'_1+*_2x'_2+\ \ldots\ +*_nx'_n\rangle$$

и

$$\pi\langle x_1+\alpha_2x_2+\ \ldots\ +\alpha_nx_n\rangle\subseteq\langle x'_1+\alpha'_ix'_i\rangle+\langle x'_2\rangle+\ \ldots\ +\langle x'_n\rangle,$$

где $\langle x'_i\rangle$ пропущено. Отсюда $*_i=\alpha'_i$.

5) Имеем также

$$\pi\langle\alpha_2x_2+\ \ldots\ +\alpha_nx_n\rangle=\langle\alpha'_2x'_2+\ \ldots\ +\alpha'_nx'_n\rangle.$$

В самом деле,

$$\pi\langle\alpha_2x_2+\ \ldots\ +\alpha_nx_n\rangle=\langle *_2x_2'+\ \ldots\ +*_nx_n'\rangle$$

и

$$\pi\langle\alpha_2x_2+\ \ldots\ +\alpha_nx_n\rangle\subseteq\langle x_1'+\alpha_2'x_2'+\ \ldots\ +\alpha_n'x_n'\rangle+\langle x_1'\rangle,$$

откуда $*_i=\alpha_i'$.

6) Взаимно однозначное отображение $'\colon F\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow F_1$ поля F на поле F_1 в действительности является изоморфизмом полей. В самом деле,

$$\langle x_1'+(\alpha+\beta)'x_2'+x_3'\rangle=\pi\langle x_1+(\alpha+\beta)x_2+x_3\rangle\subseteq$$
$$\subseteq\langle x_1'+\alpha'x_2'\rangle+\langle\beta'x_2'+x_3'\rangle,$$

поэтому $(\alpha+\beta)'=\alpha'+\beta'$. С другой стороны,

$$\langle x_1'+(\alpha\beta)'x_2'+\beta'x_3'\rangle=\pi\langle x_1+\alpha\beta x_2+\beta x_3\rangle\subseteq\langle x_1'\rangle+\langle\alpha'x_2'+x_3'\rangle,$$

поэтому $(\alpha\beta)'=\alpha'\beta'$.

7) Имея в виду 4.1.2, определим коллинеацию $k\colon V\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow V_1$ относительно изоморфизма $'$ следующим равенством:

$$k(\alpha_1x_1+\ \ldots\ +\alpha_nx_n)=(\alpha_1'x_1'+\ \ldots\ +\alpha_n'x_n').$$

Легко убедиться, что $\bar{k}$ и π совпадают на прямых. Поэтому $\pi=\bar{k}$, т. е. π — проективная коллинеация. Теорема доказана.

§ 4.3. Группы $\Gamma L_n(V)$ и $P\Gamma L_n(V)$

Коллинеацией пространства V называется коллинеация пространства V на себя. Изоморфизм полей μ, ассоциированный с коллинеацией пространства V, является в этом случае автоморфизмом поля F, т. е. если $k\colon V\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow V$ — коллинеация пространства V с ассоциированным изоморфизмом полей $\mu\colon F\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow F$, то

$$\mu\in\operatorname{Aut}F,$$

где $\operatorname{Aut}F$ обозначает группу автоморфизмов поля F. Множество коллинеаций пространства V является подгруппой общей геометрической группы $\Xi L_n(V)$. Мы будем обозначать ее через $\Gamma L_n(V)$ и называть *коллинеарной группой пространства* V. Под *группой коллинеаций* пространства V будем понимать любую подгруппу группы $\Gamma L_n(V)$. Ясно, что $GL_n(V)\subseteq\subseteq\Gamma L_n(V)$, поэтому любая группа линейных преобразований является группой коллинеаций пространства V.

Проективной коллинеацией пространства V называется проективная коллинеация пространства V на себя. Множество проективных коллинеаций пространства V совпадает с образом группы $\boldsymbol{\Gamma L}_n(V)$ при отображении $^{-}$, т. е. с группой $\boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$. Эта группа называется *проективной коллинеарной группой пространства V*. Под *проективной группой коллинеаций пространства V* будем понимать любую подгруппу группы $\boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$. Ясно, что $\boldsymbol{PGL}_n(V) \subseteq \boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$, поэтому любая проективная группа линейных преобразований является проективной группой коллинеаций пространства V.

4.3.1. *Подгруппы $\boldsymbol{RL}_n$, $\boldsymbol{SL}_n$ и $\boldsymbol{GL}_n$ нормальны в группе $\boldsymbol{\Gamma L}_n$, а $\boldsymbol{PSL}_n$ и $\boldsymbol{PGL}_n$ — в группе $\boldsymbol{P\Gamma L}_n$.*

Доказательство. Нормальность подгрупп $\boldsymbol{RL}_n$ и $\boldsymbol{GL}_n$ следует прямо из определений. Для доказательства нормальности подгруппы $\boldsymbol{SL}_n$ нужно воспользоваться предложением 3.3.3, а для доказательства нормальности подгрупп $\boldsymbol{PSL}_n$ и $\boldsymbol{PGL}_n$ применить гомоморфизм P к $\boldsymbol{SL}_n$ и $\boldsymbol{GL}_n$.

4.3.2. *Пусть $n \geqslant 2$. Если коллинеация k из $\boldsymbol{\Gamma L}_n$ такова, что $kL = L$ для всех прямых L пространства V, то $k \in \boldsymbol{RL}_n$.*

Доказательство близко к доказательству предложения 1.2.1.

4.3.3. Замечание. Пример преобразования k: $\alpha x_0 \mapsto \alpha^{\mu} x_0$, где μ — нетождественный автоморфизм, показывает, что 4.3.2 неверно при $n = 1$.

4.3.4. 1) *При $n \geqslant 1$ группа проективностей пространства V совпадает с группой $\boldsymbol{P\Xi L}_n(V)$.*

2) *Если $n \geqslant 3$, то $\boldsymbol{P\Xi L}_n(V) = \boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$.*

3) *Если $n \geqslant 2$, то $\ker\left(P|_{\Gamma L_n}\right) = \boldsymbol{RL}_n$ и $\boldsymbol{P\Gamma L}_n \simeq \boldsymbol{\Gamma L}_n/\boldsymbol{RL}_n$.*

4) *Если $n = 1$, то $\ker\left(P|_{\Gamma L_n}\right) = \boldsymbol{\Gamma L}_n$ и группа $\boldsymbol{P\Gamma L}_n$ тривиальна.*

Доказательство. Мы уже знаем, что

$$\boldsymbol{P\Gamma L}_n \subseteq \boldsymbol{P\Xi L}_n \subseteq \text{группа проективностей}.$$

Если $n \geqslant 3$, то в силу основной теоремы проективной геометрии включения заменяются равенствами. Этим доказано 1) и 2) при $n \geqslant 3$. Если $n = 1$, то доказательство 1) тривиально. Рассмотрим случай $n = 2$. Пусть π — проективность пространства V. Тогда $\pi P^1(V) = P^1(V)$. Для каждой прямой L из $P^1(V)$ зафиксируем ненулевой вектор x_L, лежащий в L. Положим $\varphi(\alpha x_L) = \alpha x_{\pi L}$ для всех $\alpha \in F$, $L \in P^1(V)$. Ясно, что

φ — геометрическое преобразование пространства V на себя, т. е. $\varphi \in \Xi L_2(V)$. Но $\bar{\varphi} = \pi$. Утверждения 1) и 2) полностью доказаны. Для доказательства 3) достаточно применить 4.3.2. Наконец, утверждение 4) тривиально.

Ввиду 4.3.4 мы можем использовать символ $P\Xi L_n(V)$ для обозначения группы проективностей пространства V.

4.3.5. 1) *Централизаторы групп* PSL_n *и* PGL_n *в* $P\Gamma L_n$ *тривиальны.*

2) *Группа* $P\Gamma L_n$ *не имеет центра.*

3) *Централизатором группы* RL_n *в* ΓL_n *является* GL_n.

4) *Централизатором группы* GL_n *в* ΓL_n *является* RL_n.

5) *Централизатором группы* SL_n *в* ΓL_n *является* RL_n *при* $n \geqslant 2$ *и* ΓL_n *при* $n = 1$.

6) *Центром группы* ΓL_n *является подгруппа*

$$\{\alpha 1_V \mid \alpha \in \dot{F},\ \alpha^\mu = \alpha \text{ для всех } \mu \text{ из } \operatorname{Aut} F\}$$

группы RL_n.

Доказательство. Пусть g — такой элемент из ΓL_n, что $\bar{g}\bar{\sigma}\bar{g}^{-1} = \bar{\sigma}$ для всех σ из SL_n. Если мы покажем, что $\bar{g} = 1$, то утверждение 1) будет доказано. Ввиду 4.3.4 можно считать, что $n \geqslant 2$. Пусть L — произвольная прямая пространства V, а τ — трансвекция с вычетной прямой L. Легко убедиться, что $g\tau g^{-1}$ — трансвекция с вычетной прямой gL. Следовательно, $\bar{\tau}$ и $\bar{g}\bar{\tau}\bar{g}^{-1}$ — проективные трансвекции с вычетными прямыми L и gL соответственно. Так как они совпадают, то $gL = L$ для всех прямых L. Поэтому в силу 4.3.2 $g \in RL_n$, $\bar{g} = 1$.

Утверждение 2) следует из 1), 3) — из определения группы GL_n, 4) — из 3) и 3.2.1. Для доказательства утверждения 5) нужно использовать 1) и 4.3.4, а для доказательства утверждения 6) — утверждение 4).

4.3.6. 1) *Отображение, сопоставляющее каждой коллинеации связанный с ней автоморфизм поля, является групповым гомоморфизмом на с ядром* GL_n.

2) $\Gamma L_n / GL_n \simeq \operatorname{Aut} F$.

3) $P\Gamma L_n / PGL_n \simeq \operatorname{Aut} F$, *если* $n \geqslant 2$.

4.3.7. Пример. Пусть F — поле с тривиальной группой автоморфизмов, например поле рациональных чисел. Рассмотрим случай $n = 2$. Тогда $P\Gamma L_2 = PGL_2$. Легко видеть, что всякий элемент σ из GL_2, оставляющий на месте три различные прямые пространства V, лежит в RL_2, поэтому всякий элемент k из $P\Gamma L_2$, оставляющий неподвижными

по крайней мере три элемента из $P^1(V)$, равен единице. Очевидным образом можно определить проективность π пространства V, которая два элемента из $P^1(V)$ переставляет, а все другие оставляет на месте. Такая проективность π не может совпадать с проективной коллинеацией, если пространство V содержит хотя бы пять прямых. Другими словами, при $n=2$ основная теорема проективной геометрии неверна.

Под *представителем* элемента Σ из $\boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$ мы понимаем такой элемент k из $\boldsymbol{\Gamma L}_n(V)$, что $\bar{k}=\Sigma$. Если k_1 и k_2 — элементы из $\boldsymbol{\Gamma L}_n(V)$, то при $n\geqslant 2$ в силу 4.3.4 следующие утверждения равносильны:

1) k_1 и k_2 — представители одного и того же Σ из $\boldsymbol{P\Gamma L}_n$,
2) $k_1=k_2r$ для некоторого r из $\boldsymbol{RL}_n$,
3) $k_1=rk_2$ для некоторого r из $\boldsymbol{RL}_n$.

Если $n\geqslant 2$, то все представители элемента Σ из $\boldsymbol{PGL}_n$ лежат в $\boldsymbol{GL}_n$.

§ 4.4. Изоморфизмы Φ_g

Теперь мы определим групповые изоморфизмы Φ_g — сначала для коллинеации $g\colon V \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow V_1$ пространства V на пространство V_1, а затем для проективной коллинеации $g\colon P(V) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow P(V_1)$ пространства V на пространство V_1.

Пусть сначала задана коллинеация $g\colon V \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow V_1$ пространства V на пространство V_1 и $\mu\colon F \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow F_1$ — связанный с ней изоморфизм полей. В частности, $n=n_1$. Ясно, что отображение Φ_g, определенное равенством

$$\Phi_g k = gkg^{-1} \quad \text{для всех} \quad k\in \boldsymbol{\Gamma L}_n(V),$$

является изоморфизмом групп

$$\Phi_g\colon \boldsymbol{\Gamma L}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{\Gamma L}_{n_1}(V_1).$$

Для композиции и обращения справедливы равенства

$$\Phi_{g_1g}=\Phi_{g_1}\Phi_g,\quad \Phi_g^{-1}=\Phi_{g^{-1}}.$$

Далее, Φ_g индуцирует изоморфизмы

$$\Phi_g\colon \boldsymbol{GL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{GL}_{n_1}(V_1),$$
$$\Phi_g\colon \boldsymbol{SL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{SL}_{n_1}(V_1),$$
$$\Phi_g\colon \boldsymbol{RL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{RL}_{n_1}(V_1).$$

Если $\sigma\in \boldsymbol{GL}_n(V)$, то

$$\det(\Phi_g\sigma)=(\det\sigma)^{\mu}.$$

Вычетным и неподвижным пространствами преобразования $\Phi_g\sigma$ являются gR и gP соответственно. В частности,

$$\operatorname{res}\Phi_g\sigma = \operatorname{res}\sigma.$$

Если H — гиперплоскость, L — прямая и $L \subseteq H$, то gL — прямая, лежащая в гиперплоскости gH пространства V_1. Изоморфизм Φ_g отображает множество трансвекций с пространствами $L \subseteq H$ на множество трансвекций с пространствами $gL \subseteq gH$. Если σ — трансвекция вида $\sigma = \tau_{a,\rho}$, то

$$\Phi_g\tau_{a,\rho} = \tau_{ga,\,\mu\rho g^{-1}}.$$

Пусть теперь задана проективная коллинеация $g\colon P(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow P(V_1)$ пространства V на пространство V_1. Имеем снова $n = n_1$. Полагая

$$\Phi_g k = gkg^{-1} \text{ для всех } k \in \boldsymbol{P\Gamma L}_n(V),$$

получим изоморфизм групп

$$\Phi_g\colon \boldsymbol{P\Gamma L}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{P\Gamma L}_{n_1}(V_1).$$

Для композиции и обращения справедливы равенства

$$\Phi_{g_1g} = \Phi_{g_1}\Phi_g, \quad \Phi_g^{-1} = \Phi_{g^{-1}}.$$

Так как g — проективная коллинеация, то она имеет вид $g = \bar{h}$ для некоторой коллинеации $h\colon V \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow V_1$. Легко убедиться, что

$$\Phi_g\bar{j} = \Phi_{\bar{h}}\bar{j} = \overline{\Phi_h j} \text{ для всех } j \in \boldsymbol{\Gamma L}_n(V).$$

Следовательно, Φ_g индуцирует изоморфизмы

$$\Phi_g\colon \boldsymbol{PGL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{PGL}_{n_1}(V_1),$$
$$\Phi_g\colon \boldsymbol{PSL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1).$$

Кроме того, Φ_g отображает множество проективных трансвекций с пространствами $L \subseteq H$ на множество проективных трансвекций с пространствами $gL \subseteq gH$.

4.4.1. *Пусть* $n = n_1 \geqslant 2$. *Для любых коллинеаций* g_1, g_2 *пространства* V *на пространство* V_1 *следующие утверждения равносильны*:

1) $\Phi_{\bar{g}_1} = \Phi_{\bar{g}_2}$,
2) $\bar{g}_1 = \bar{g}_2$,
3) $g_1 = g_2 r$ *для некоторого* r *из* $\boldsymbol{RL}_n(V)$,
4) $g_1 = r_1 g_2$ *для некоторого* r_1 *из* $\boldsymbol{RL}_{n_1}(V_1)$.

§ 4.5. Контраградиент

Рассмотрим полулинейное отображение $k: V \to V_1$ относительно изоморфизма полей $\mu: F \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow F_1$. Ясно, что $\mu^{-1}\rho_1 k \in V'$ для каждого $\rho_1 \in V_1'$. Это позволяет с каждым полулинейным отображением k связать *транспонированное отображение*

$$^t k\colon V_1' \to V',$$

определяемое формулой

$$^t k(\rho_1) = \mu^{-1}\rho_1 k, \quad \rho_1 \in V_1'.$$

Другими словами, каждому k соответствует точно одно отображение $^t k$, такое, что

$$\langle x, {}^t k\rho_1\rangle^{\mu} = \langle kx, \rho_1\rangle \text{ для всех } x \in V, \ \rho_1 \in V_1'.$$

Это равенство является определяющим для $^t k$.

Ясно, что $^t k\colon V_1' \to V'$ — полулинейное отображение относительно $\mu^{-1}\colon F_1 \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow F$. Для любых двух полулинейных отображений k и l пространства V в пространство V_1 имеем

$$^t k = 0 \Leftrightarrow k = 0,$$
$$^t k = {}^t l \Leftrightarrow k = l.$$

Если $k\colon V \to V_1$ и $k_1\colon V_1 \to V_2$ полулинейны, то их композиция $k_1 k\colon V \to V_2$ тоже полулинейна и

$$^t(k_1 k) = {}^t k\, {}^t k_1.$$

Пусть зафиксированы базы $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ пространств V и V_1 соответственно. Обозначим через $\mathfrak{X}'$ и $\mathfrak{Y}'$ сопряженные с ними базы пространств V' и V_1'. Если A — матрица отображения k относительно баз $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, а B — матрица отображения $^t k$ относительно баз $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{X}'$, то

$$B^{\mu} = {}^t A.$$

В самом деле,

$$a_{ij} = \left\langle \sum_{\lambda} a_{\lambda j} y_{\lambda}, \ y_i' \right\rangle = \left\langle kx_j, \ y_i' \right\rangle = \left\langle x_j, \ {}^t k y_i' \right\rangle^{\mu} =$$
$$= \left\langle x_j, \ \sum_{\lambda} b_{\lambda i} x_{\lambda}' \right\rangle^{\mu} = b_{ji}^{\mu}.$$

В частности, k тогда и только тогда будет взаимно однозначным отображением *на*, когда таково транспонированное отображение $^t k$. Если $k\colon V \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow V_1$ взаимно однозначно *на*, то

${}^t(k^{-1})$ и $({}^tk)^{-1}$ — полулинейные относительно $\mu: F \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow F_1$ взаимно однозначные отображения пространства V' на пространство V_1', поэтому

$$ {}^t(k^{-1}) = ({}^tk)^{-1}. $$

Для произвольной коллинеации k определим *контраградиентную* к ней коллинеацию $\check{k}$, полагая

$$ \check{k} = {}^tk^{-1}. $$

Ассоциированный изоморфизм полей для $\check{k}$ и k одинаков, и мы имеем диаграммы

$$ k: V \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow V_1, \quad \mu: F \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow F_1, \quad \check{k}: V' \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow V_1'. $$

Контраградиент $\check{}$ связан с композицией и обращением следующим образом:

$$ (k_1 \ldots k_t)\check{} = \check{k}_1 \ldots \check{k}_t, $$
$$ (k^{-1})\check{} = (\check{k})^{-1}. $$

Зафиксируем V и рассмотрим действие контраградиента на коллинеациях пространства V, т. е. на $\mathbf{\Gamma L}_n(V)$. Легко видеть, что контраградиент — это изоморфизм

$$ \check{}: \mathbf{\Gamma L}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{\Gamma L}_n(V'), $$

сохраняющий ассоциированные автоморфизмы поля. Он индуцирует изоморфизмы

$$ \check{}: \mathbf{GL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{GL}_n(V'), $$
$$ \check{}: \mathbf{SL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{SL}_n(V'), $$
$$: \mathbf{RL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{RL}_n(V'). $$

Далее,

$$ \operatorname{mat}_{\mathfrak{X}} k = A \Leftrightarrow \operatorname{mat}_{\mathfrak{X}'} \check{k} = \check{A}, $$

где $\mathfrak{X}'$ — база, сопряженная с $\mathfrak{X}$, а матрица $\check{A}$ определяется для обратимой матрицы A равенством

$$ \check{A} = {}^tA^{-1}. $$

Кроме того, для любого k из $\mathbf{\Gamma L}_n(V)$ и любого подпространства U пространства V имеем

$$ \check{k}U^0 = (kU)^0. $$

Назовем изоморфизм $\check{}: \mathbf{\Gamma L}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{\Gamma L}_n(V')$ *контраградиентным изоморфизмом над пространством* V.

4.5.1. *Пусть* $\check{}$ — *контраградиентный изоморфизм над пространством* V, *а* σ — *произвольный элемент из* $\mathbf{GL}_n(V)$. *Тогда*

1) *вычетным пространством преобразования* $\check{\sigma}$ *является* P^0,

2) *неподвижным пространством преобразования* $\check{\sigma}$ *является* R^0,

3) $\operatorname{res}\check{\sigma} = \operatorname{res}\sigma$,

4) $\check{}$ *отображает множество трансвекций с пространствами* $L \subseteq H$ *на множество трансвекций с пространствами* $H^0 \subseteq L^0$,

5) *если* σ — *трансвекция* $\sigma = \tau_{a,\rho}$, *то* $\check{\tau}_{a,\rho} = \tau_{\rho,\tilde{a}}$, *где элемент* $\tilde{a}$ *из* V'' *определен равенством* $\langle\varphi, \tilde{a}\rangle = \langle a, \varphi\rangle$.

Доказательство. Достаточно доказать 1) — 4) с заменой $\check{\sigma}$ на ${}^t\sigma$, а вместо 5) доказать, что ${}^t\tau_{a,\rho} = \tau_{\rho,\tilde{a}}$. Обозначим через R_t, P_t вычетное и неподвижное пространства преобразования ${}^t\sigma$. Если $\rho \in R^0$, то для любого x из V имеем

$$\langle x, {}^t\sigma\rho - \rho\rangle = \langle \sigma x - x, \rho\rangle \in \langle R, R^0\rangle = 0.$$

Отсюда ${}^t\sigma\rho = \rho$, $R^0 \subseteq P_t$. С другой стороны, если $\rho \in P_t$, то для произвольного x из V

$$\langle \sigma x - x, \rho\rangle = \langle x, {}^t\sigma\rho - \rho\rangle = 0,$$

откуда $P_t \subseteq R^0$. Следовательно, $P_t = R^0$. Утверждение 2), а вместе с ним и 3) доказаны. Далее, для любых $p \in P$, $\rho \in V'$

$$\langle p, {}^t\sigma\rho - \rho\rangle = \langle \sigma p - p, \rho\rangle = 0.$$

Поэтому $R_t \subseteq P^0$ и из соображений размерности $R_t = P^0$. Итак, мы доказали 1), 2) и 3). Утверждение 4) следует из 1) и 2). Докажем 5):

$$\langle x, {}^t\tau_{a,\rho}\varphi\rangle = \langle x + (\rho x) a, \varphi\rangle = \langle x, \varphi\rangle + \langle x, \rho\rangle\langle a, \varphi\rangle =$$
$$= \langle x, \varphi\rangle + \tilde{a}(\varphi)\langle x, \rho\rangle = \langle x, \varphi + \tilde{a}(\varphi)\rho\rangle = \langle x, \tau_{\rho,\tilde{a}}\varphi\rangle.$$

Предложение полностью доказано.

Так как контраградиентный изоморфизм отображает $\mathbf{RL}_n(V)$ на $\mathbf{RL}_n(V')$, то можно определить изоморфизм

$$\check{}: \mathbf{P\Gamma L}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{P\Gamma L}_n(V'),$$

полагая

$$\check{\bar{k}} = \overline{\check{k}} \text{ для всех } \bar{k} \text{ из } \boldsymbol{P\Gamma L}_n(V).$$

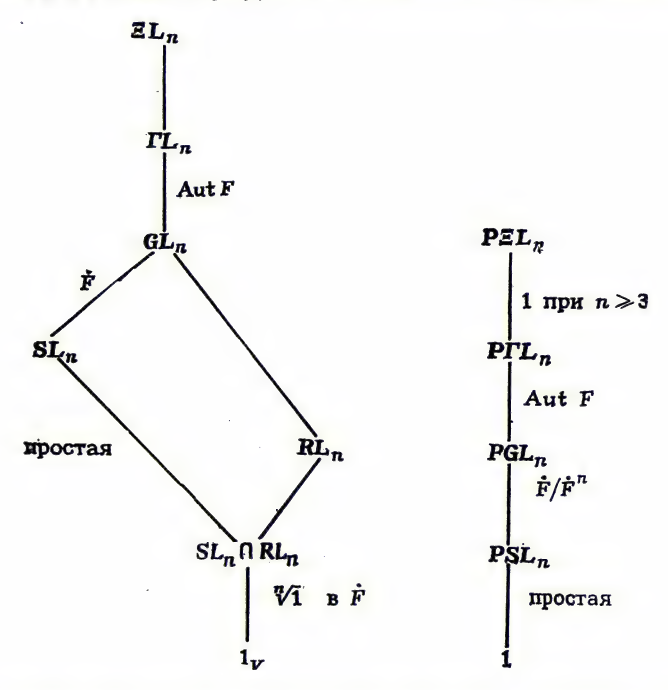
Мы будем называть его *проективным контраградиентным изоморфизмом над пространством* V. Ясно, что он индуцирует изоморфизмы

$$\check{}: \boldsymbol{PGL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{PGL}_n(V'),$$
$$\check{}: \boldsymbol{PSL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{PSL}_n(V')$$

и отображает проективные трансвекции с пространствами $L \subseteq H$ на проективные трансвекции с пространствами $H^0 \subseteq L^0$. Если S — произвольное подмножество из $\boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$, то $\check{S}$ имеет обычный функциональный смысл, т. е. $\check{S} = \{\check{s} \mid s \in S\}$.

§ 4.6. Комментарии

Наши результаты для $n \geqslant 2$ (кроме случаев, когда $n = 2$ и $F = \mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$) иллюстрируются следующими диаграммами:



Для дальнейшего чтения по проективной геометрии (в частности, над телами) укажем книги Артина [3] и Бэра [4].

Глава 5. ИЗОМОРФИЗМЫ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП

§ 5.1. Предварительные сведения

Обозначим через $C_A(X)$ централизатор в A непустого подмножества X абстрактной группы A. Ясно, что $C_A(X)$ — подгруппа в A и

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow C_A(X_1) \supseteq C_A(X_2),$$
$$X \subseteq C_A C_A(X).$$

Если φ: $A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \varphi A$ — изоморфизм, то

$$\varphi C_A(X) = C_{\varphi A}(\varphi X).$$

Для краткости будем писать

$$C_V(X) = C_{GL_n(V)}(X)$$

или

$$C_V(X) = C_{PGL_n(V)}(X)$$

в зависимости от того, с какой из групп $\boldsymbol{GL}_n(V)$, $\boldsymbol{PGL}_n(V)$ мы имеем дело. Символ C без индексов будет использоваться нами для обозначения централизаторов C_G и C_Δ в группах G и Δ, которые будут определены позже.

5.1.1. *Если* $\sigma \in \boldsymbol{GL}_2(V) - \boldsymbol{RL}_2(V)$, *то* $DC_V(\sigma) = 1_V$.

Доказательство. Преобразование σ должно сдвигать некоторую прямую, так как $\sigma \notin \boldsymbol{RL}_2(V)$. Поэтому существует база $\mathfrak{X}$ пространства V, в которой матрица преобразования σ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$. Прямым вычислением находим, что матрица произвольного преобразования из $C_V(\sigma)$ в базе $\mathfrak{X}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} p & \beta r \\ r & p+\alpha r \end{pmatrix}.$$

Любые две матрицы такого вида перестановочны. Предложение доказано.

5.1.2. *Пусть* $n = 2$, L *и* K — *различные прямые в* V, τ_L *и* τ_K — *трансвекции с вычетными прямыми* L *и* K *соответственно. Тогда коммутатор* $\tau_L \tau_K \tau_L^{-1} \tau_K^{-1}$ *лежит в* $\boldsymbol{GL}_2 - \boldsymbol{RL}_2$ *и имеет вычетное пространство* V. *Если* T_K — *трансвекция с вычетной прямой* K, *отличная от* τ_K, *то преобразования* $\tau_L \tau_K \tau_L^{-1} \tau_K^{-1}$ *и* $\tau_L \mathrm{T}_K \tau_L^{-1} \mathrm{T}_K^{-1}$ *не перестановочны.*

Доказательство. 1) Так как L — единственная прямая, инвариантная относительно τ_L, то прямая $J = \tau_L K$ отлична от K. Но $\tau_J = \tau_L \tau_K \tau_L^{-1}$ — трансвекция с вычетной прямой J. Поэтому вычетным пространством преобразования $\tau_L \tau_K \tau_L^{-1} \tau_K^{-1} = \tau_J \tau_K^{-1}$ является, ввиду 1.3.3, пространство $V = J + K$. Так как преобразование $\tau_L \tau_K \tau_L^{-1} \tau_K^{-1}$ есть произведение двух трансвекций, то оно не может принадлежать группе $\boldsymbol{RL}_2$. Это доказывает первую часть утверждения.

2) Выберем базу x_1, x_2 так, чтобы было $Fx_1 = L$ и $Fx_2 = K$. В этой базе

$$\tau_L \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_K \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}_K \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix},$$

$\alpha\beta\gamma \neq 0$ и $\beta \neq \gamma$. Прямое вычисление с этими матрицами показывает, что указанные коммутаторы не перестановочны.

Напомним, что преобразование $\sigma \in \boldsymbol{GL}_n(V)$ называется *унипотентным*, если $(\sigma - 1_V)^k = 0$ для некоторого $k > 0$, т. е. если преобразование $(\sigma - 1_V)$ нильпотентно. Сужение унипотентного преобразования на инвариантное подпространство также унипотентно. Следующие утверждения равносильны:

1) σ унипотентно,

2) все характеристические корни преобразования σ равны 1,

3) существует база пространства V, в которой σ имеет верхнюю треугольную матрицу с единицами на диагонали.

5.1.3. *Если поле F имеет характеристику $p > 0$, то преобразование $\sigma \in \boldsymbol{GL}_n(V)$ тогда и только тогда унипотентно, когда $\sigma^{p^\nu} = 1_V$ для некоторого $\nu \geqslant 0$.*

Доказательство. По формуле бинома для перестановочных линейных преобразований

$$(\sigma - 1_V)^{p^\nu} = \sigma^{p^\nu} - 1_V.$$

Теперь ясно, что из условия $\sigma^{p^\nu} = 1_V$ следует унипотентность. Обратно, если $(\sigma - 1_V)^k = 0$, то $(\sigma - 1_V)^{p^\nu} = 0$ при $p^\nu > k$, откуда $\sigma^{p^\nu} = 1_V$.

Элемент $\Sigma \in \boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$ назовем *проективным унипотентным преобразованием*, если $\Sigma = \bar{\sigma}$ для некоторого унипотентного преобразования $\sigma \in \boldsymbol{GL}_n(V)$. В этом случае мы называем σ унипотентным представителем элемента Σ. Очевидно, унипотентный представитель определяется единственным образом.

5.1.4. Пример. *Все трансвекции унипотентны, все проективные трансвекции являются проективными унипотентными преобразованиями.*

Будем говорить, что элементы k_1, $k_2 \in \mathbf{\Gamma L}_n(V)$ *проективно перестановочны*, если $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ перестановочны. Очевидно, из перестановочности следует проективная перестановочность. В некоторых случаях справедливо и обратное, а именно

5.1.5. *Пусть* $\sigma \in \mathbf{GL}_n(V)$ *удовлетворяет одному из следующих условий*:

1) $\operatorname{res} \sigma < \frac{1}{2} n$,

2) $\operatorname{res} \sigma = \frac{1}{2} n$ *и* σ *не является большой дилатацией*,

3) σ *имеет точно один характеристический корень в поле* F,

4) σ *унипотентно*.

Тогда, если σ *проективно перестановочно с* $\Sigma \in \mathbf{GL}_n(V)$, *то* σ *и* Σ *перестановочны*.

5.1.6. *Если* σ *и* $\Sigma \in \mathbf{GL}_n(V)$ *проективно перестановочны, то* σ^n *и* Σ *перестановочны*.

5.1.7. Пример. Пусть $n = 3$ и $\sigma \in \mathbf{GL}_3(V)$ таково, что $\operatorname{res} \sigma = 2$. Преобразование $\Sigma \in \mathbf{GL}_3(V)$, проективно перестановочное, но не перестановочное с σ, существует тогда и только тогда, когда $\det \sigma = 1$, σ диагонализируемо над F и $\sigma^3 = 1$. В самом деле, предположим сначала, что эти условия выполнены. Тогда в некоторой базе

$$\sigma \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \omega \neq 1, \ \omega^3 = 1.$$

Пусть Σ — преобразование из $\mathbf{GL}_3(V)$, определенное условием

$$\Sigma \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^{-1} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\Sigma\sigma\Sigma^{-1} = \omega^2\sigma$, так что Σ проективно перестановочно, но не перестановочно с σ. Обратно, пусть имеются Σ и $\alpha \neq 0, 1$, такие, что

$$\alpha(\Sigma\sigma\Sigma^{-1}) = \sigma.$$

Очевидно, $\alpha^3 = 1$. Так как $\operatorname{res} \sigma = 2$, то найдется ненулевой вектор x, неподвижный относительно σ. Но $\sigma(\Sigma x) = \alpha(\Sigma x)$ и $\sigma(\Sigma^2 x) = \alpha^2(\Sigma^2 x)$. Следовательно,

$$\sigma \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix},$$

так как 1, α, α^2 различны. Таким образом, все условия выполнены. Заметим, что если преобразование $\sigma \in \boldsymbol{GL}_3(V)$ с $\operatorname{res} \sigma = 2$ удовлетворяет нашим условиям, то группа

$$\langle (C_V(\bar{\sigma}))^3 \rangle$$

абелева. Для того чтобы убедиться в этом, зафиксируем базу x_1, x_2, x_3, в которой σ имеет диагональную матрицу. Рассмотрим представитель Σ произвольного $\bar{\Sigma} \in C_V(\bar{\sigma})$. Так как Σ проективно перестановочно с σ, то ввиду 5.1.6 Σ^3 перестановочно с σ. Итак, каждый элемент $\bar{\varphi}$ группы $\langle (C_V(\bar{\sigma}))^3 \rangle$ имеет представитель φ, перестановочный с σ, т. е. $\varphi\sigma\varphi^{-1} = \sigma$. Далее, Fx_i — единственная прямая, на которой σ имеет характеристический корень α_i. Но $\sigma(\varphi x_i) = \alpha_i(\varphi x_i)$, поэтому $\varphi(Fx_i) = Fx_i$, $i = 1, 2, 3$. Таким образом, все φ перестановочны между собой, и, значит, группа $\langle (C_V(\bar{\sigma}))^3 \rangle$ абелева, что и утверждалось.

§ 5.2. Группы, богатые трансвекциями

Будем говорить, что подгруппа G из $\boldsymbol{\Gamma L}_n(V)$ *богата трансвекциями*, если $n \geqslant 2$ и для любой гиперплоскости $H \subseteq V$ и любой прямой $L \subseteq H$ в группе G найдется по крайней мере одна трансвекция, для которой $R = L$, $P = H$.

Аналогично, подгруппа Δ из $\boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$ называется *богатой проективными трансвекциями*, если $n \geqslant 2$ и для любой гиперплоскости $H \subseteq V$ и любой прямой $L \subseteq H$ в группе Δ найдется по крайней мере одна проективная трансвекция, для которой $R = L$, $P = H$.

5.2.1. Пример. При $n \geqslant 2$ группа $\boldsymbol{SL}_n(V)$ богата трансвекциями, а группа $\boldsymbol{PSL}_n(V)$ богата проективными трансвекциями. Разумеется, этими группами примеры не исчерпываются. Позже мы увидим, например, что $\boldsymbol{SL}_n(V)$ и $\boldsymbol{PSL}_n(V)$ содержат бесконечно много таких подгрупп в случае, когда F — поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

С этого момента G будет обозначать подгруппу из $\boldsymbol{\Gamma L}_n(V)$, богатую трансвекциями, а Δ — подгруппу из $\boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$, богатую проективными трансвекциями. Через G_1 и Δ_1 обозначаются аналогичные группы, связанные с пространством V_1 размерности n_1 над полем F_1. Наконец, пусть Λ — изоморфизм групп

$$\Lambda\colon \Delta \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1.$$

Будем говорить, что Λ *сохраняет проективную трансвекцию* σ из Δ, если $\Lambda\sigma$ — проективная трансвекция, и что Λ

сохраняет проективную трансвекцию $\sigma_1 \in \Delta_1$, если $\Lambda^{-1}\sigma_1$ — проективная трансвекция. Изоморфизм Λ называется *сохраняющим проективные трансвекции*, если он сохраняет все проективные трансвекции из Δ и Δ_1.

5.2.2. *Группы* $\check{G}$ *и* $\check{\Delta}$ *также богаты.*

Доказательство. См. § 4.5, особенно утверждение 4.5.1.

5.2.3. *Если* $n \geqslant 3$, *то группы* DG *и* $D\Delta$ *также богаты.*

Доказательство. Начнем с G. Для данной гиперплоскости H и данной прямой $L \subseteq H$ мы должны найти трансвекцию $\sigma \in DG$, такую, что $R = L$ и $P = H$. Выберем базу $x_1, \ldots, x_n$ пространства V так, чтобы было $Fx_1 = L$ и $Fx_1 + \ldots + Fx_{n-1} = H$. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — сопряженная база. Так как группа G богата, то существуют $\alpha, \beta \in \dot{F}$, такие, что

$$\tau_{x_1, \alpha\rho_2} \in G, \quad \tau_{x_2, \beta\rho_n} \in G.$$

Тогда трансвекция

$$\sigma = \tau_{x_1, \alpha\beta\rho_n} = [\tau_{x_1, \alpha\rho_2}, \tau_{x_2, \beta\rho_n}] \in DG$$

является искомой. Теперь разберемся с Δ. Так как Δ богата проективными трансвекциями, то $P^{-1}\Delta$ богата трансвекциями, следовательно, $DP^{-1}\Delta$ также богата трансвекциями, и, значит, $D\Delta = P(DP^{-1}\Delta)$ богата проективными трансвекциями, что и требовалось доказать.

5.2.4. *Пусть* R_0, P_0 — *произвольные подпространства пространства* V, *удовлетворяющие условию* $\dim R_0 + \dim P_0 = n$. *Если* R_0 — *прямая, то предположим дополнительно, что* $R_0 \subseteq P_0$. *Тогда существует преобразование* σ, *являющееся произведением* $\dim R_0$ *трансвекций из* G *и такое, что* $R = R_0$, $P = P_0$.

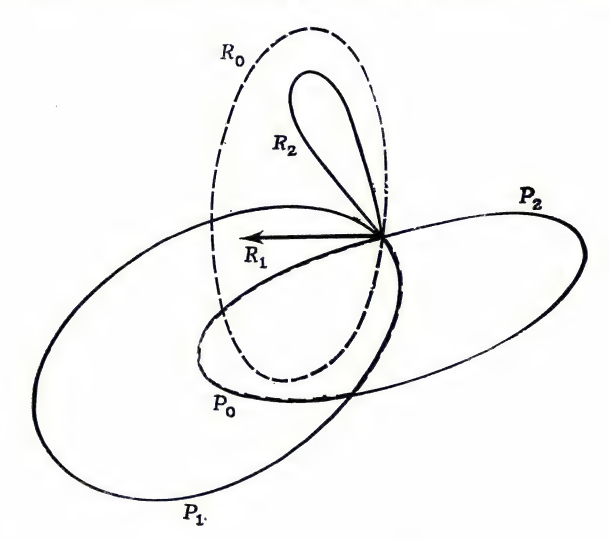
Доказательство. Если $R_0 = 0$ или R_0 — прямая, то утверждение очевидно. Пусть теперь R_0 — плоскость. Выберем прямые L_1, L_2 и гиперплоскости H_1, H_2 так, чтобы было

$$L_1 \subseteq H_1, \quad L_2 \subseteq H_2,$$
$$R_0 = L_1 + L_2, \quad P_0 = H_1 \cap H_2.$$

Для того, чтобы убедиться в возможности такого выбора, рассмотрим отдельно случаи, когда пересечение $R_0 \cap P_0$ является точкой, прямой и плоскостью. Так как G богата трансвекциями, то можно найти в ней трансвекции σ_1 и σ_2,

для которых $R_1 = L_1$, $P_1 = H_1$, $R_2 = L_2$, $P_2 = H_2$. Положим $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ и применим 1.3.3.

Теперь проводим индукцию по $\dim R_0$. По предыдущему можно считать, что $\dim R_0 \geqslant 3$ и, значит, $\dim P_0 \leqslant n - 3$. Пусть P_1 — гиперплоскость, содержащая подпространство P_0, а P_2 — подпространство из V, удовлетворяющее условиям $\dim P_2 = \dim P_0 + 1$, $P_2 \cap P_1 = P_0$. В частности, $V = P_1 + P_2$.



Пусть R_1 — произвольная прямая в $P_1 \cap R_0$. Выберем R_2 так, чтобы было $R_0 = R_1 \oplus R_2$. Ввиду того что группа G богата, найдется трансвекция $\sigma_1 \in G$ с вычетным пространством R_1 и неподвижным пространством P_1. По индукции существует преобразование σ_2, являющееся произведением $\dim R_2$ трансвекций из G, причем связанные с σ_2 пространства есть R_2 и P_2. Положим теперь $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ и применим 1.3.3.

5.2.5. *При $n \geqslant 2$ группа DG содержит σ с $R = V$.*

Доказательство. При $n \geqslant 3$ использовать 5.2.3 и 5.2.4. Если $n = 2$, то применить 5.1.2.

5.2.6. *Предположим, что $n \geqslant 2$. Тогда*

1) *централизатор группы G в $\boldsymbol{\Gamma L}_n(V)$ содержится в $\boldsymbol{RL}_n$, в частности,*

$$G \cap \operatorname{cen} \boldsymbol{\Gamma L}_n \subseteq \operatorname{cen} G \subseteq \operatorname{cen} \boldsymbol{GL}_n;$$

2) *централизатор группы Δ в $\boldsymbol{P\Gamma L}_n$ тривиален, в частности, центр группы Δ тривиален.*

5.2.7. *Предположим, что* $n \geqslant 2$, $G \subseteq \boldsymbol{GL}_n$. *Тогда* $C_V(G) = \boldsymbol{RL}_n$ *и* $\operatorname{cen} G = G \cap \boldsymbol{RL}_n$.

5.2.8. *Пусть* $n \geqslant 3$ *и* $F \neq \mathbb{F}_2$. *Тогда для любой гиперплоскости* $H \subseteq V$ *и любой прямой* $L \subseteq H$ *в группе* G *найдутся по крайней мере две различные трансвекции, а в группе* Δ — *по крайней мере две различные проективные трансвекции с вычетной прямой* L *и неподвижной гиперплоскостью* H.

Доказательство. Пусть функционал $\rho \in V'$ задает H. Выберем в H два линейно независимых вектора a и b так, чтобы было $L = Fa$ и

$$\tau_{a,\rho},\ \tau_{b,\rho},\ \tau_{a+b,\rho} \in G.$$

Так как $F \neq \mathbb{F}_2$, то в плоскости $Fa + Fb$ существует прямая $F(\lambda a + \mu b)$, отличная от Fa, Fb и $F(a+b)$ и такая, что $\tau_{\lambda a + \mu b, \rho} \in G$. Если $\mu = 1$, то $\lambda \neq 0, 1$, поэтому

$$\tau_{(1-\lambda)a,\rho} = \tau_{a,\rho}\tau^{-1}_{\lambda a+\mu b,\rho}\tau_{b,\rho} \in G,$$

и все доказано. Пусть теперь $\mu \neq 1$. Пусть σ — трансвекция в G с вычетной прямой L, неподвижная гиперплоскость которой содержит L, но не b. Тогда $\sigma b = b + \nu a$ для некоторого $\nu \in \dot{F}$. Для любого $x \in V$

$$\rho(\sigma x - x) \in \rho L \subseteq \rho H = 0,$$

поэтому $\rho\sigma = \rho$, откуда $\rho\sigma^{-1} = \rho$. Имеем

$$\tau_{\nu a,\rho} = \tau_{\sigma b - b,\rho} = \sigma\tau_{b,\rho}\sigma^{-1}\tau^{-1}_{b,\rho} \in G.$$

Аналогично

$$\tau_{\mu\nu a,\rho} = \tau_{\mu(\sigma b - b),\rho} = \tau_{\sigma(\lambda a+\mu b),\rho}\tau^{-1}_{\lambda a+\mu b,\rho} = \sigma\tau_{\lambda a+\mu b,\rho}\sigma^{-1}\tau^{-1}_{\lambda a+\mu b,\rho} \in G.$$

Но $\mu \neq 1$, поэтому $\tau_{\nu a,\rho}$ и $\tau_{\mu\nu a,\rho}$ — различные трансвекции из G с пространствами $L \subseteq H$.

В проективном случае применяем только что полученный результат к $P^{-1}\Delta$.

5.2.9. *Пусть* $G \subseteq \boldsymbol{GL}_n$. *Тогда*

1) $C_V(DG) = \boldsymbol{RL}_n$, *если* $n \geqslant 3$,

2) $C_V(DG) = \boldsymbol{RL}_n$, *если* $n \geqslant 2$ *и* G *содержит по крайней мере две различные трансвекции с одной и той же вычетной прямой,*

3) 1_V — *единственное унипотентное преобразование, содержащееся в* $C_V(DG)$.

Доказательство. 1) Если $n \geqslant 3$, то применяем 5.2.3 и 5.2.7.

2) Группа DG не абелева в силу 5.1.2. Для произвольного $\sigma \in C_V(DG)$ имеем

$$C_V(\sigma) \supseteq C_V(C_V(DG)) = C_V C_V(DG) \supseteq DG,$$

так что и $C_V(\sigma)$ не абелева. Поэтому $DC_V(\sigma) \neq 1_V$, откуда ввиду 5.1.1 $\sigma \in \boldsymbol{RL}_2$. Следовательно, $C_V(DG) = \boldsymbol{RL}_2$.

3) Утверждение очевидно, если $C_V(DG) = \boldsymbol{RL}_n$, поэтому необходимо рассмотреть только случай $n = 2$. Тогда произвольный унипотентный элемент $\sigma \in C_V(DG)$ является трансвекцией. Пусть L — соответствующая вычетная прямая. Зафиксируем прямую K, отличную от L, и выберем в G трансвекции τ_L, τ_K с вычетными прямыми L и K. Тогда σ перестановочно с $\tau_L \tau_K \tau_L^{-1} \tau_K^{-1}$ и, очевидно, с τ_L, а поэтому и с трансвекцией $\tau_K \tau_L^{-1} \tau_K^{-1}$, для которой вычетной прямой является $\tau_K L$. Следовательно, каждая из прямых L и $\tau_K L$ инвариантна относительно σ. Они различны, так как $L \neq K$. Но σ унипотентно, поэтому $\sigma = 1$.

§ 5.3. *CDC* в линейном случае

Если определить G как прообраз группы Δ относительно гомоморфизма $P|_{\Gamma L_n}$, то G будет группой, богатой трансвекциями, и потому к ней применима теория § 5.2. Если Δ удовлетворяет условию $\Delta \subseteq \boldsymbol{PGL}_n(V)$, то соответствующая группа G будет удовлетворять условию $G \subseteq \boldsymbol{GL}_n(V)$. В § 5.3 и 5.4 мы будем считать, что G и Δ удовлетворяют этим дополнительным условиям, т. е.

$$\Delta \subseteq \boldsymbol{PGL}_n, \quad G = P^{-1}\Delta \cap \boldsymbol{\Gamma L}_n, \quad G \subseteq \boldsymbol{GL}_n.$$

Легко видеть, что тогда $\check{G}$ и $\check{\Delta}$ удовлетворяют аналогичным условиям над V', т. е.

$$\check{\Delta} \subseteq \boldsymbol{PGL}_n, \quad \check{G} = P^{-1}\check{\Delta} \cap \boldsymbol{\Gamma L}_n, \quad \check{G} \subseteq \boldsymbol{GL}_n.$$

Будем обозначать через C централизатор C_Δ, C_G, $C_{\check{\Delta}}$, $C_{\check{G}}$ в соответствии с тем, какая из групп Δ, G, $\check{\Delta}$, $\check{G}$ рассматривается.

5.3.1. *Для любого σ из G*

$$\overline{C(\sigma)} \subseteq C(\bar{\sigma}), \quad \overline{DC(\sigma)} \subseteq DC(\bar{\sigma}).$$

Если, кроме того, σ перестановочно с каждым элементом группы G, с которым оно проективно перестановочно, то

$$\overline{C(\sigma)} = C(\bar{\sigma}), \quad \overline{DC(\sigma)} = DC(\bar{\sigma}),$$

Для произвольных подпространств U, W из V определим

$$G(U, W) = \{\sigma \in G \mid R \subseteq U,\ P \supseteq W\},$$

$$\Delta(U, W) = \overline{G(U, W)}.$$

Согласно 1.3.1, $G(U, W)$ и $\Delta(U, W)$ — подгруппы в G и Δ соответственно, причем $\Delta(U, W)$ состоит из таких преобразований $\Sigma \in \Delta$, которые имеют по крайней мере один представитель σ с $R \subseteq U$ и $P \supseteq W$. Заметим, что

$$\sigma U = U, \quad \sigma W = W \quad \text{для всех} \quad \sigma \in G(U, W),$$

$$\Sigma U = U, \quad \Sigma W = W \quad \text{для всех} \quad \Sigma \in \Delta(U, W).$$

5.3.2. Пример. Если H—гиперплоскость в V и L—прямая, лежащая в H, то $G(L, H)$ состоит из всех трансвекций группы G с вычетной прямой L и неподвижной гиперплоскостью H и тождественного преобразования 1_V, а $\Delta(L, H)$ — из всех проективных трансвекций группы Δ с вычетной прямой L и неподвижной гиперплоскостью H и 1.

5.3.3. *Если U, W — подпространства в V, то*

$$(G(U, W))^{\vee} = \check{G}(W^0, U^0), \quad (\Delta(U, W))^{\vee} = \check{\Delta}(W^0, U^0).$$

5.3.4. *Пусть σ_1, σ_2 — нетривиальные трансвекции из G. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $R_1 = R_2$, $P_1 = P_2$,
2) $C(\sigma_1) = C(\sigma_2)$,
3) $C(\bar{\sigma}_1) = C(\bar{\sigma}_2)$.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2). Пусть $R_1 = R_2$ и $P_1 = P_2$. Рассмотрим произвольный элемент $\Sigma \in C(\sigma_1)$. Представим σ_1 и σ_2, как обычно, в виде $\sigma_1 = \tau_{a,\rho}$, $\sigma_2 = \tau_{\alpha a,\rho}$. Имеем

$$\tau_{a,\rho} = \Sigma \tau_{a,\rho} \Sigma^{-1} = \tau_{\Sigma a,\rho\Sigma^{-1}},$$

поэтому $\Sigma a = \lambda a$, $\rho\Sigma^{-1} = \lambda^{-1}\rho$ для некоторого $\lambda \in \dot{F}$, откуда

$$\Sigma \tau_{\alpha a,\rho} \Sigma^{-1} = \tau_{\alpha\Sigma a,\rho\Sigma^{-1}} = \tau_{\alpha\lambda a,\lambda^{-1}\rho} = \tau_{\alpha a,\rho},$$

так что $\Sigma \in C(\sigma_2)$. Значит, $C(\sigma_1) = C(\sigma_2)$.

2)$\Rightarrow$3). Применить 5.3.1.

3)$\Rightarrow$1). Пусть $P_1 \neq P_2$. Тогда существует прямая L, лежащая в P_2, но не в P_1. Так как G богата трансвекциями, то существует трансвекция σ_3 с $R_3 = L$ и $P_3 = P_2$. Тогда $\sigma_3 \in C(\sigma_2)$, но $\sigma_3 \notin C(\sigma_1)$ в силу 1.4.10, следовательно, $\bar{\sigma}_3 \in C(\bar{\sigma}_2)$, но $\bar{\sigma}_3 \notin C(\bar{\sigma}_1)$ в силу 5.1.5. Поэтому $C(\bar{\sigma}_2) \neq C(\bar{\sigma}_1)$, что противоречит нашим предположениям. Значит, $P_1 = P_2$. Равенство $R_1 = R_2$ получаем применением изоморфизма $\check{}$.

5.3.5. *Если* $n \geqslant 3$ *и* σ — *нетривиальная трансвекция из* G, *то*

$$G(R, P) \cap DC(\sigma) \neq 1_V,$$

т. е. $DC(\sigma)$ *содержит нетривиальную трансвекцию с теми же пространствами, что и данная трансвекция* σ.

Доказательство. Существует база $x_1, \ldots, x_n$ пространства V, такая, что $\sigma = \tau_{x_1, \rho_n}$, где $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — сопряженная база. Поэтому $R = Fx_1$ и $P = \ker \rho_n$. Так как G богата трансвекциями, то для некоторых $\alpha, \beta \in \dot{F}$ имеем $\tau_{x_1, \alpha\rho_2} \in G$ и $\tau_{x_2, \beta\rho_n} \in G$. Тогда $\tau_{x_1, \alpha\rho_2} \in C(\sigma)$ и $\tau_{x_2, \beta\rho_n} \in C(\sigma)$. Положим $\Sigma = \tau_{x_1, \alpha\beta\rho_n}$. Очевидно, Σ — трансвекция в G с вычетной прямой R и неподвижной гиперплоскостью P. Но

$$\Sigma = [\tau_{x_1, \alpha\rho_2}, \tau_{x_2, \beta\rho_n}],$$

поэтому $\Sigma \in DC(\sigma)$.

5.3.6. *Если* $n \geqslant 3$, H — *гиперплоскость в* V *и* L — *прямая в* H, *то существует нетривиальная трансвекция* $\tau \in G$ *с пространствами* $L \subseteq H$, *такая, что* $\tau \in DC(\tau)$.

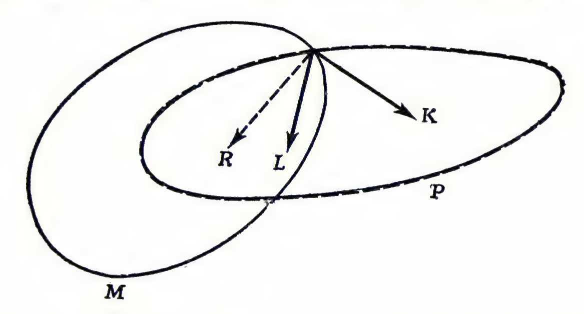
Доказательство. Пусть σ — трансвекция из G с пространствами $L \subseteq H$. В силу 5.3.5 в G найдется трансвекция τ с пространствами $L \subseteq H$, такая, что $\tau \in DC(\sigma)$. Но $C(\tau) = C(\sigma)$ ввиду 5.3.4.

5.3.7. *Если* $n \geqslant 4$ *и* σ — *нетривиальная трансвекция из* G, *то*

$$G(L, P) \cap DC(\sigma) \neq 1_V$$

для всех прямых L *из* P.

Доказательство. Зафиксируем прямую K в P, такую, что $K \not\subseteq R + L$. Пусть M — гиперплоскость в V, содержащая $R + L$, но не содержащая K. Пусть τ_L — трансвекция из G



с пространствами $L \subseteq M$, а τ_K — трансвекция из G с пространствами $K \subseteq P$. В силу 1.4.10 τ_L и τ_K лежат в $C(\sigma)$.

Положим $\Sigma = \tau_L \tau_K \tau_L^{-1} \tau_K^{-1}$. Очевидно, $\Sigma \in DC(\sigma)$. Далее, $\tau_L K \neq K$, так как $K \not\subseteq M$, и, следовательно, $\tau_L \tau_K \tau_L^{-1}$ — трансвекция с вычетной прямой $\tau_L K$, отличной от K, и с неподвижной гиперплоскостью $\tau_L P = P$. Поэтому $\Sigma = (\tau_L \tau_K \tau_L^{-1}) \tau_K^{-1}$ — нетривиальная трансвекция с неподвижной гиперплоскостью P. Аналогично получаем, что $\Sigma = \tau_L (\tau_K \tau_L^{-1} \tau_K^{-1})$ имеет вычетную прямую L. Итак, Σ — неединичный элемент из $G(L, P) \cap DC(\sigma)$. Предложение доказано.

5.3.8. *Пусть σ — нетривиальная трансвекция из G. Тогда*

$$CC(\bar{\sigma}) = \Delta(R, P) \quad \text{при} \quad n \geqslant 2,$$
$$CDC(\bar{\sigma}) = \Delta(R, P) \quad \text{при} \quad n \geqslant 4.$$

Доказательство. 1) Пусть $\bar{\Sigma}$ — произвольный неединичный элемент из $\Delta(R, P)$. Ввиду 5.3.4 $C(\bar{\Sigma}) = C(\bar{\sigma})$, откуда

$$\bar{\Sigma} \in CC(\bar{\Sigma}) = CC(\bar{\sigma})$$

и, значит, $\Delta(R, P) \subseteq CC(\bar{\sigma})$.

1a) Пусть сначала $n \geqslant 3$. Рассмотрим $\Sigma \in G$, такой, что $\bar{\Sigma} \in CC(\bar{\sigma})$. Для каждой прямой $L \subseteq P$ группа Δ содержит проективную трансвекцию τ_L с вычетной прямой L и неподвижной гиперплоскостью P. В силу 1.6.4 $\tau_L \in C(\bar{\sigma})$, поэтому $\bar{\Sigma}$ перестановочен с τ_L, а значит, и Σ перестановочен с трансвекцией, представляющей τ_L, откуда получаем, что $\Sigma L = L$ для всех L из P. Следовательно, существует такой элемент $\alpha \in \dot{F}$, что неподвижное пространство преобразования $\alpha\Sigma$ содержит P. Применение этого результата к $\check{\Sigma}$ и $\check{\sigma}$ даст нам такое $\beta \in \dot{F}$, что неподвижное пространство преобразования $\beta\Sigma$ содержится в R. Легко видеть, что $\alpha = \beta$. Но тогда $\alpha\Sigma \in G(R, P)$ и, значит, $\bar{\Sigma} \in \Delta(R, P)$. Тем самым равенство $CC(\bar{\sigma}) = \Delta(R, P)$ доказано при $n \geqslant 3$.

1b) Пусть теперь $n = 2$. Снова рассмотрим $\Sigma \in G$, такой, что $\bar{\Sigma} \in CC(\bar{\sigma})$. Так как $\bar{\sigma} \in C(\bar{\sigma})$, то $\bar{\Sigma} \in C(\bar{\sigma})$, поэтому $\Sigma \in C(\sigma)$ в силу 5.1.5. Если выбрать базу пространства V, в которой σ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то матрица преобразования Σ в этой базе будет иметь вид $\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}$, т. е. $\bar{\Sigma}$ будет иметь представитель с матрицей вида $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Другими словами, $\bar{\Sigma} \in \Delta(R, P)$. Итак, при $n = 2$ также $CC(\bar{\sigma}) = \Delta(R, P)$.

2) Пусть теперь $n \geqslant 4$. Очевидно, $\Delta(R, P) = CC(\bar\sigma) \subseteq CDC(\bar\sigma)$. Для доказательства обратного включения поступаем как в п. 1а), используя проективный вариант предложения 5.3.7.

5.3.9. *Предположим, что* $n \geqslant 3$. *Пусть* σ — *элемент группы* G *с* $\operatorname{res}\sigma = 2$, *причем* $(\sigma|_R)$ *не является растяжением. Исключим также случай, когда* $n = 3$, $\det\sigma = 1$, σ *диагонализируем над* F, $\sigma^3 = 1$. *Тогда* $\Delta(R, P) \subseteq CDC(\bar\sigma)$.

Доказательство. 1) Покажем вначале, что достаточно доказать включение $DC(\sigma) \subseteq G(P, R)$. В самом деле, пусть оно доказано. Рассмотрим произвольный элемент $\bar\Sigma \in DC(\bar\sigma)$. Тогда $DC(\bar\sigma) = \overline{DC(\sigma)}$ ввиду 5.1.5, 5.1.7 и 5.3.1, и, значит, $\bar\Sigma$ имеет представитель Σ в $DC(\sigma)$. В силу нашего предположения $\Sigma \in G(P, R)$, поэтому для каждого $\varphi \in G(R, P)$

$$R_\Sigma \subseteq P \subseteq P_\varphi, \quad P_\Sigma \supseteq R \supseteq R_\varphi,$$

т. е. φ перестановочен со всеми $\Sigma \in DC(\sigma)$. Следовательно, любой элемент $\bar\varphi \in \Delta(R, P)$ перестановочен со всеми $\bar\Sigma \in DC(\bar\sigma)$, т. е. $\bar\varphi \in CDC(\bar\sigma)$, откуда $\Delta(R, P) \subseteq CDC(\bar\sigma)$.

2) Легко проверить, что если $\sigma \in G$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то $\check\sigma \in \check G$ также им удовлетворяет (для доказательства рассмотреть случаи, когда $(\check\sigma|_{P^0})$ — нетривиальное растяжение и когда $(\check\sigma|_{P^0}) = 1$). Поэтому, если показать, что

$$\sigma_3 \in DC(\sigma) \Rightarrow R \subseteq P_3,$$

то в силу двойственности будем иметь $P \supseteq R_3$, откуда $DC(\sigma) \subseteq G(P, R)$, и доказательство тем самым будет закончено. Остается доказать импликацию. По предположению $\sigma|_R \in \boldsymbol{GL}_2(R) - \boldsymbol{RL}_2(R)$, поэтому $DC_R(\sigma|_R) = 1_R$ в силу 5.1.1. Но легко проверяется, что

$$DC(\sigma)|_R \subseteq DC_R(\sigma|_R).$$

Следовательно, $\sigma_3|_R = 1_R$, откуда $R \subseteq P_3$, что и требовалось доказать.

5.3.10. *Пусть* $n \geqslant 4$. *Пусть* σ — *элемент группы* G *с* $\operatorname{res}\sigma = 2$, $R \cap P = 0$ *и* σ *не является большой дилатацией. Исключим также случай, когда* $n = 4$ *и* $F = \mathbb{F}_2$. *Тогда* $\Delta(R, P) = CDC(\bar\sigma)$.

Доказательство. Ввиду 5.3.9 достаточно убедиться, что $CDC(\bar\sigma) \subseteq \Delta(R, P)$.

1) Для каждой гиперплоскости H пространства P и каждой прямой L в H зафиксируем в группе G трансвекцию $\tau_{L,H}$

с вычетной прямой L и неподвижной гиперплоскостью H. (Если $n=4$, то $F \neq \mathbb{F}_2$, поэтому в силу 5.2.8 можно выбрать — и мы выберем — две различные трансвекции $\tau_{L,H}$ и $\tau'_{L,H}$ для любых таких L и H.) Очевидно, подпространства R и P инвариантны относительно $\tau_{L,H}$, $\tau_{L,H}|_P$ — трансвекция с пространствами $L \subseteq H$ и $\tau_{L,H}|_R = 1_R$ (аналогично для $\tau'_{L,H}$). Пусть G_P обозначает подгруппу в $\boldsymbol{GL}_{n-2}(P)$, порожденную всеми $\tau_{L,H}|_P$ (и $(\tau'_{L,H}|_P)$ при $n=4$). Очевидно, что G_P богата трансвекциями (вдвойне богата при $n=4$) и

$$1_R \oplus G_P \subseteq C(\sigma),$$
$$1_R \oplus DG_P = D(1_R \oplus G_P) \subseteq DC(\sigma),$$
$$C_P(DG_P) = \boldsymbol{RL}_{n-2}(P),$$

где последнее равенство есть следствие утверждения 5.2.9.

2) Предположим сначала, что $n \geqslant 5$. Рассмотрим произвольный элемент $\bar{\Sigma} \in CDC(\bar{\sigma})$, и пусть Σ — один из его представителей. Тогда Σ проективно перестановочен с любым элементом группы $1_R \oplus DG_P$. Для любой прямой L из P в группе DG_P существует трансвекция с вычетной прямой L, так как в силу 5.2.3 DG_P богата трансвекциями. Значит, и $1_R \oplus DG_P$ содержит трансвекцию с вычетной прямой L. Ввиду 5.1.5 Σ перестановочен с этой трансвекцией, откуда $\Sigma L = L$ для любой прямой L из P. В частности, $\Sigma P = P$ и $\Sigma|_P \in \boldsymbol{RL}_{n-2}(P)$. В силу двойственности $\Sigma R = R$. Следовательно, $\bar{\Sigma} \in \Delta(R, P)$.

3) Пусть $n=4$. Теперь наши $\tau_{L,H}$ можно обозначить через τ_L. Снова рассмотрим произвольный элемент $\bar{\Sigma} \in CDC(\bar{\sigma})$, пусть Σ — один из его представителей. Пусть L, K — две произвольные различные прямые в P. Ввиду 5.1.2 преобразование

$$(\tau_L \tau_K \tau_L^{-1} \tau_K^{-1})|_P = (\tau_L|_P)(\tau_K|_P)(\tau_L|_P)^{-1}(\tau_K|_P)^{-1}$$

лежит в $\boldsymbol{GL}_2(P) - \boldsymbol{RL}_2(P)$ и имеет вычет 2, согласно 5.1.2. Следовательно, преобразование $\tau_L \tau_K \tau_L^{-1} \tau_K^{-1}$ имеет вычетное пространство P и неподвижное пространство R, не является большой дилатацией и принадлежит группе $DC(\sigma)$. Поэтому Σ проективно перестановочен, а потому и просто перестановочен с $\tau_L \tau_K \tau_L^{-1} \tau_K^{-1}$, откуда $\Sigma R = R$, $\Sigma P = P$. Далее, Σ проективно перестановочен со всеми элементами группы

$$1_R \oplus DG_P \subseteq DC(\sigma),$$

поэтому, ввиду 5.1.5, Σ перестановочен со всеми элементами группы $1_R \oplus DG_P$, которые не являются большими дилатаци-

ями вычета 2. Но, очевидно, Σ перестановочен и со всеми большими дилатациями вычета 2, т. е. вообще со всеми элементами группы $1_R \oplus DG_P$, поэтому

$$\Sigma|_P \in C_P(DG_P) = \boldsymbol{RL}_2(P),$$

откуда $\bar{\Sigma} \in \Delta(R, P)$.

5.3.11. *Пусть* $n \geqslant 4$. *Пусть* σ — *элемент группы* G *с* $\operatorname{res}\sigma = 2$, *причем* $R \cap P = 0$ *и* σ *не является большой дилатацией. Тогда всякое проективное унипотентное преобразование из* $CDC(\bar{\sigma})$ *является проективной трансвекцией и лежит в* $\Delta(R, P)$.

Доказательство. Если $n \geqslant 5$ или если $n = 4$ и $F \neq \mathbb{F}_2$, то применяем предложение 5.3.10. Если же $n = 4$ и $F = \mathbb{F}_2$, то поступаем как при доказательстве 5.3.10, используя третью часть предложения 5.2.9.

5.3.12. *Пусть* $n \geqslant 4$. *Пусть* σ — *элемент группы* G *с* $\operatorname{res}\sigma = 2$, *причем* $R \cap P = 0$ *и* σ *не является большой дилатацией. Тогда* $\bar{\sigma} \notin DC(\bar{\sigma})$.

5.3.13. *Если* Σ — *элемент группы* G *и* $\Sigma \in DC(\Sigma)$, *то преобразование* $\Sigma^{n!}$ *унипотентно.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что F алгебраически замкнуто и $G = \boldsymbol{GL}_n(V)$.

Пусть $\alpha, \beta, \ldots$ — различные характеристические корни преобразования Σ. Жорданова форма преобразования Σ дает разложения

$$V = V_\alpha \oplus V_\beta \oplus \ldots,$$
$$\Sigma = \Sigma_\alpha \oplus \Sigma_\beta \oplus \ldots,$$

где все корни преобразования Σ_α равны α и т. д. Заметим, что $\det \Sigma_\alpha = \alpha^{n_\alpha}$, где $n_\alpha = \dim V_\alpha$, и т. д. Теперь

$$V_\alpha = \{x \in V \mid (\Sigma - \alpha 1_V)^k x = 0 \text{ для некоторого } k > 0\},$$

откуда

$$\mathrm{T} \in C(\Sigma) \Rightarrow \mathrm{T}V_\alpha = V_\alpha \text{ и т. д.}$$

Следовательно, произвольный элемент $\Psi \in DC(\Sigma)$ имеет вид

$$\Psi = \Psi_\alpha \oplus \Psi_\beta \oplus \ldots,$$

где $\Psi_\alpha \in \boldsymbol{SL}_{n_\alpha}(V_\alpha)$ и т. д. В частности, $\Sigma_\alpha \in \boldsymbol{SL}_{n_\alpha}(V_\alpha)$, откуда $\alpha^{n_\alpha} = 1$ и, значит, $\alpha^{n!} = 1$ и т. д. Поэтому все характеристические корни преобразования $\Sigma^{n!}$ равны 1,

5.3.14. *Пусть* $n=3$. *Пусть* σ — *элемент группы* DG, *причем* $\bar{\sigma}\in DC(\bar{\sigma})$. *Тогда*

1) *если* σ *унипотентно, то* σ — *трансвекция,*
2) σ^{18} — *трансвекция,*
3) *если* F *имеет характеристику* 3, *то* σ^2 — *трансвекция,*
4) *если* F *имеет характеристику* 2, *то* σ^9 — *трансвекция.*

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $\sigma\neq 1_V$.

1) Так как σ унипотентно и $n=3$, то $\operatorname{res}\sigma=1$ или 2. Допустим, $\operatorname{res}\sigma=2$. Тогда $\sigma R=R$ и $\sigma|_R\in \boldsymbol{GL}_2(R)-\boldsymbol{RL}_2(R)$ снова ввиду унипотентности преобразования σ. Отсюда следует, что R инвариантно относительно $C(\sigma)$ и ввиду 5.1.1 группа $DC(\sigma)$ действует тождественно на R. С другой стороны, $\bar{\sigma}\in DC(\bar{\sigma})=\overline{DC(\sigma)}$ в силу 5.1.5 и 5.3.1, поэтому $\alpha\sigma$ действует на R тождественно для некоторого α. Но σ унипотентно, поэтому $\alpha=1$, т. е. σ действует тождественно на R, а это противоречит нашему допущению, что $\operatorname{res}\sigma=2$. Следовательно, на самом деле $\operatorname{res}\sigma=1$. Но $\det\sigma=1$, так как $\sigma\in DG$. Значит, σ — трансвекция, что и утверждалось.

2) В силу 5.1.6 имеем $C(\bar{\sigma})\subseteq\overline{C(\sigma^3)}$, поэтому $\bar{\sigma}\in DC(\bar{\sigma})\subseteq\overline{DC(\sigma^3)}$, откуда $\alpha\sigma\in DC(\sigma^3)$. Но $\alpha^3=1$, так как преобразования σ и $\alpha\sigma$ имеют определитель 1. Поэтому $\sigma^3\in DC(\sigma^3)$, и в силу 5.3.13 преобразование σ^{18} унипотентно. Далее,

$$\bar{\sigma}^{18}\in DC(\bar{\sigma})\subseteq DC(\bar{\sigma}^{18}),$$

и можно применить утверждение п. 1).

3) В силу 2), $(\sigma^2)^{3^2}$ — трансвекция. Так как характеристика F равна 3, то $(\sigma^2)^{3^3}=1_V$. Ввиду 5.1.3 σ^2 унипотентно. Но

$$\bar{\sigma}^2\in DC(\bar{\sigma})\subseteq DC(\bar{\sigma}^2),$$

и можно применить 1).

4) Поступаем, как в 3). Предложение доказано.

§ 5.4. Сохранение проективных трансвекций в линейном случае

Напомним, что в § 5.3 и 5.4 мы предполагаем, что группы G и Δ обладают следующими дополнительными свойствами:

$$\Delta\subseteq \boldsymbol{PGL}_n,\ G=P^{-1}\Delta\cap\boldsymbol{\Gamma L}_n,\ G\subseteq\boldsymbol{GL}_n.$$

Чтобы применить результаты § 5.3 к группам G_1 и Δ_1, мы предполагаем всюду в § 5.4, что G_1 и Δ_1 также имеют до-

полнительные свойства

$$\Delta_1 \subseteq \boldsymbol{PGL}_{n_1}, \ G_1 = P^{-1}\Delta_1 \cap \boldsymbol{\Gamma L}_{n_1}, \ G_1 \subseteq \boldsymbol{GL}_{n_1}.$$

Наша цель — показать, что при этих предположениях всякий изоморфизм Λ: $\Delta \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1$ сохраняет проективные трансвекции, если размерности соответствующих пространств $\geqslant 3$. Начнем с доказательства того, что „Λ сохраняет вычет 2 хотя бы один раз“.

5.4.1. *Пусть* $n \geqslant 3$, $n_1 \geqslant 3$. *Исключим из рассмотрения случай, когда* F *имеет характеристику* $\neq 2$, *а* $F_1 = \mathbb{F}_2$. *Тогда существует* $\sigma \in DG$, $\sigma_1 \in DG_1$ *с* $\operatorname{res}\sigma = \operatorname{res}\sigma_1 = 2$, *такие, что* $\Lambda\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1$. ***Более того, для данной трансвекции*** $\tau \in G$ ***с пространствами*** $L \subseteq H$ ***преобразования*** σ ***и*** σ_1 ***можно выбрать так, что будет*** $\sigma\tau \neq \tau\sigma$,

$$L \subseteq R, \ H \supseteq P, \ \sigma|_R \notin \boldsymbol{RL}_2(R)$$

и

$$R_1 \cap P_1 = 0, \ \sigma_1|_{R_1} \notin \boldsymbol{RL}_2(R_1).$$

Доказательство. 1) Имеем $\Lambda\bar{\tau} = \overline{\Phi}$ для некоторого $\Phi \in G_1$. Так как $\overline{\Phi} \neq 1$, то в пространстве V_1 существует такая прямая $L_1 = F_1 a$, что $\Phi L_1 \neq L_1$. Выберем гиперплоскость H_1 в V_1 так, чтобы было

$$L_1 \subseteq H_1, \ \Phi L_1 \nsubseteq H_1, \ \Phi^{-1}L_1 \nsubseteq H_1$$

(почему это возможно?). Имеем

$$L_1 \nsubseteq \Phi H_1, \ H_1 \neq \Phi H_1,$$
$$\dim(L_1 + \Phi L_1) = 2, \ \dim(H_1 \cap \Phi H_1) = n - 2$$

и

$$V_1 = (L_1 + \Phi L_1) \oplus (H_1 \cap \Phi H_1).$$

2) Зафиксируем $\rho \in V_1'$ с $\ker\rho = H_1$. Разумеется, существует несколько ненулевых a в L_1, таких, что $\tau_{a,\rho} \in G_1$, так как G_1 богата трансвекциями. Мы утверждаем, что найдется по крайней мере один такой вектор a, для которого Φ не является проективно перестановочным с $\tau_{a,\rho}\Phi^{-1}\tau_{a,\rho}^{-1}$. Предположим, что это не выполняется при первом выборе a. Тогда существует такой скаляр $\alpha \in F_1$, что

$$\Phi\tau_{a,\rho}\Phi^{-1}\tau_{a,\rho}^{-1} = \alpha\tau_{a,\rho}\Phi^{-1}\tau_{a,\rho}^{-1}\Phi,$$

т. е.

$$\tau_{\Phi a, \rho\Phi^{-1}}\tau_{-a,\rho} = \alpha\tau_{a,\rho}\tau_{-\Phi^{-1}a, \rho\Phi}.$$

Отсюда

$$(\alpha-1)x+\big((\alpha+1)(\rho x)-\alpha(\rho\Phi x)(\rho\Phi^{-1}a)\big)a+$$
$$+\big((\rho x)(\rho\Phi^{-1}a)-(\rho\Phi^{-1}x)\big)\Phi a=\alpha(\rho\Phi x)\,\Phi^{-1}a$$

для всех $x\in V_1$. Полагая $x=a$, находим, что векторы a, Φa, $\Phi^{-1}a$ линейно зависимы, т. е. лежат в некоторой плоскости. Беря x вне этой плоскости, получим, что $\alpha=1$. Таким образом,

$$\big(2(\rho x)-(\rho\Phi x)(\rho\Phi^{-1}a)\big)a+\big((\rho x)(\rho\Phi^{-1}a)-(\rho\Phi^{-1}x)\big)\Phi a=$$
$$=(\rho\Phi x)\,\Phi^{-1}a.$$

Если $F_1\neq\mathbb{F}_2$, то ввиду 5.2.8 можно заменить в этом равенстве a на λa для некоторого $\lambda\neq 0, 1$. Тогда два эти равенства (для a и λa) дают

$$(\rho\Phi x)(\rho\Phi^{-1}a)=\lambda(\rho\Phi x)(\rho\Phi^{-1}a),$$

что противоречиво, так как $\lambda\neq 1$ и $\rho\Phi^{-1}a\neq 0$. Итак, если $F_1\neq\mathbb{F}_2$ и вектор a не годится, то подходит вектор λa. С другой стороны, если $F_1=\mathbb{F}_2$, то $\Phi^2=1_{V_1}$, так как τ — трансвекция и 1 — единственный ненулевой скаляр в F_1. Наше равенство принимает вид

$$(\rho\Phi x)(\rho\Phi a)a+(\rho x)(\rho\Phi a)\Phi a=0,$$

а это противоречит независимости векторов a и Φa. Утверждение доказано.

3) Итак, мы имеем $\rho\in V_1'$ с $\ker\rho=H_1$ и ненулевой вектор a в L_1, такой, что $\tau_{a,\rho}\in G_1$ и Φ не является проективно перестановочным с $\tau_{a,\rho}\Phi^{-1}\tau_{a,\rho}^{-1}$. Выберем $\Psi\in G$ так, чтобы было $\Lambda\bar{\psi}=\bar{\tau}_{a,\rho}$, и положим

$$\sigma=\tau\psi\tau^{-1}\psi^{-1}\in DG,\ \ \sigma_1=\Phi\tau_{a,\rho}\Phi^{-1}\tau_{a,\rho}^{-1}\in DG_1.$$

Очевидно, $\Lambda\bar{\sigma}=\bar{\sigma}_1$. Кроме того, τ не перестановочно с $\psi\tau^{-1}\psi^{-1}$, поэтому $\sigma\tau\neq\tau\sigma$.

4) Что касается преобразования σ_1, то достаточно проверить равенства

$$R_1=L_1+\Phi L_1,\ \ P_1=H_1\cap\Phi H_1,$$

так как тогда соотношения $\operatorname{res}\sigma_1=2$ и $R_1\cap P_1=0$ очевидны, а условие $\sigma_1|_{R_1}\notin \boldsymbol{RL}_2(R_1)$ является следствием того, что по теореме 2.1.8 большая дилатация вычета 2 не может быть

произведением двух трансвекций. Далее, σ_1 — произведение двух трансвекций с пространствами $\Phi L_1 \subseteq \Phi H_1$ и $L_1 \subseteq H_1$. Кроме того, $\Phi H_1 + H_1 = V_1$, поэтому $R_1 = L_1 + \Phi L_1$ ввиду 1.3.3. Наконец, $L_1 \cap \Phi L_1 = 0$, поэтому $P_1 = H_1 \cap \Phi H_1$, снова в силу 1.3.3.

5) Теперь рассмотрим σ. Достаточно проверить, что

$$\psi L \neq L,\ R = L + \psi L,\ P = H \cap \psi H,\ R \nsubseteq P,$$

так как тогда условия $\operatorname{res} \sigma = 2$, $L \subseteq R$, $H \supseteq P$ очевидны, а $\sigma|_R \notin \boldsymbol{RL}_2(R)$ следует из теоремы 2.1.8, как и выше. Очевидно, $\psi L \neq L$, иначе трансвекция τ была бы перестановочна с трансвекцией $\psi\tau^{-1}\psi^{-1}$. Точно так же $\psi H \neq H$, поэтому R и P имеют требуемый вид. Наконец, $R \nsubseteq P$, так как иначе $L + \psi L \subseteq H + \psi H$, т. е. $L \subseteq \psi H$ и $\psi L \subseteq H$, т. е. τ была бы перестановочна с $\psi\tau^{-1}\psi^{-1}$ ввиду 1.4.10. Предложение доказано.

Теперь мы покажем, что „Λ сохраняет хотя бы раз вычет 1“.

5.4.2. *Если* $n \geqslant 3$, $n_1 \geqslant 3$, *то существуют элементы* $\tau \in DG$, $\tau_1 \in DG_1$, с $\operatorname{res} \tau = \operatorname{res} \tau_1 = 1$, *такие, что* $\Lambda\bar{\tau} = \bar{\tau}_1$.

Доказательство. 1) Пусть обе размерности $\geqslant 4$. В случае необходимости, меняя местами V, n, F и V_1, n_1, F_1 и рассматривая Λ^{-1} вместо Λ, можно считать, что характеристика поля F равна 2, если $F_1 = \mathbb{F}_2$. Рассмотрим произвольную нетривиальную трансвекцию $\mathrm{T} \in G$, удовлетворяющую условию $\mathrm{T} \in DC(\mathrm{T})$. Пусть $L \subseteq H$ — пространства трансвекции Т. В силу 5.4.1 существуют $\sigma \in DG$, $\sigma_1 \in DG_1$ с $\operatorname{res} \sigma = \operatorname{res} \sigma_1 = 2$, такие, что $\Lambda\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1$, $\sigma\mathrm{T} \neq \mathrm{T}\sigma$ и

$$L \subseteq R,\ H \supseteq P,\ \sigma|_R \notin \boldsymbol{RL}_2(R),$$
$$R_1 \cap P_1 = 0,\ \sigma_1|_{R_1} \notin \boldsymbol{RL}_2(R_1).$$

Очевидно, что Т — нетривиальная проективная трансвекция из $\Delta(R, P)$. Но в силу 5.3.9 $\Delta(R, P) \subseteq CDC(\bar{\sigma})$, поэтому $\mathrm{T} \in CDC(\bar{\sigma})$. Далее, $\bar{\sigma}\bar{\mathrm{T}} \neq \bar{\mathrm{T}}\bar{\sigma}$ и $\bar{\sigma} \in \Delta(R, P) \subseteq CDC(\bar{\sigma})$, поэтому $\bar{\mathrm{T}}$ — нецентральный элемент из $CDC(\bar{\sigma})$ и $\bar{\mathrm{T}} \in DC(\bar{\mathrm{T}})$. Следовательно, $\Lambda\bar{\mathrm{T}}$ — также нецентральный элемент из $CDC(\bar{\sigma}_1)$ и $\Lambda\bar{\mathrm{T}} \in DC(\Lambda\bar{\mathrm{T}})$.

1а) Рассмотрим сначала случай, когда $F_1 \neq \mathbb{F}_2$ или $n_1 \neq 4$. Тогда, согласно 5.3.10, $\Lambda\bar{\mathrm{T}} \in CDC(\bar{\sigma}_1) = \Delta(R_1, P_1)$. Поэтому $\Lambda\bar{\mathrm{T}}$ имеет в группе G_1 представитель σ_3 с $R_3 \subseteq R_1$ и $P_3 \supseteq P_1$. На самом деле $R_3 \subset R_1$, так как в противном случае было бы $R_3 = R_1$, $P_3 = R_1$ и, если σ_3 не является большой дилата-

цией, то, согласно 5.3.12, было бы $\bar{\sigma}_3 \notin DC(\bar{\sigma}_3)$, что противоречит включению $\Lambda\overline{T} \in DC(\Lambda\overline{T})$; если же σ_3 — большая дилатация, то она была бы центральным элементом в $G_1(R_1, P_1)$, что противоречит нецентральности элемента $\Lambda\overline{T}$ в $CDC(\bar{\sigma}_1)$. Итак, $R_3 \subset R_1$. Тем самым доказано, что если T — произвольная трансвекция из G и $T \in DC(T)$, то $\Lambda\overline{T} = \bar{\sigma}_3$ для некоторого σ_3 из G_1 с $\operatorname{res} \sigma_3 = 1$. Ввиду 5.3.6 для данных $L \subseteq H$ в группе G всегда найдется трансвекция T с пространствами $L \subseteq H$, такая, что $T \in DC(T)$. Рассматривая элементарные трансвекции, легко найти в группе G такие трансвекции T_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, что $T_i \in DC(T_i)$ и $T_1 = [T_2, T_3]$. В силу только что доказанного, каждая трансвекция $\Lambda\overline{T}_i$ имеет в группе G_1 представитель φ_i с $\operatorname{res} \varphi_i = 1$. Поэтому $\Lambda\overline{T}_1$ имеет в G_1 представитель с вычетом 1, а в DG_1 представитель с вычетом $\leqslant 2$. Так как $n_1 \geqslant 4$, то эти представители должны совпадать. Другими словами, $\Lambda\overline{T}_1 = \bar{\tau}_1$ для некоторого $\tau_1 \in DG_1$ с $\operatorname{res} \tau_1 = 1$. Положим $\tau = T_1$.

1b) Рассмотрим теперь случай, когда $F_1 = \mathbb{F}_2$ и $n_1 = 4$. Разумеется, тогда характеристика поля F равна 2. Так как T — трансвекция в характеристике 2, то $\overline{T}^2 = 1$. Ввиду того что $F_1 = \mathbb{F}_2$, $\Lambda\overline{T}$ имеет в G_1 представитель σ_3 с $\sigma_3^2 = 1$, т. е. $\Lambda\overline{T}$ — проективное унипотентное преобразование, лежащее в $CDC(\bar{\sigma}_1)$. Отсюда, в силу 5.3.11, следует, что $\Lambda\overline{T}$ — проективная трансвекция. Далее, ввиду 5.3.6 в группе G существует нетривиальная трансвекция T, удовлетворяющая условию $T \in DC(T)$. Для нее преобразование $\Lambda\overline{T}$ должно иметь представитель $\tau_1 \in G_1$, являющийся трансвекцией. В частности, $\operatorname{res} \tau_1 = 1$. Но $G_1 = \boldsymbol{SL}_4(V_1)$, так как $F_1 = \mathbb{F}_2$. Поэтому в силу 3.3.3 $\tau_1 \in G_1 = DG_1$. Положим $\tau = T$.

2) Пусть теперь одна из размерностей равна 3, другая $\geqslant 4$. Переходя, если необходимо, к обратному изоморфизму, можно считать, что $n = 3$, $n_1 \geqslant 4$.

2a) Сначала предположим, что характеристика поля F равна 2, если $F_1 = \mathbb{F}_2$. В этом случае процедура точно такая же, как в п. 1), за единственным исключением, когда элемент σ имеет вычет 2, $n = 3$, $\det \sigma = 1$, σ диагонализируем над F и $\sigma^3 = 1$ — тогда 5.3.9 нельзя применить. Покажем, что на самом деле этот исключительный случай невозможен. Пусть, напротив, он имеет место. Если характеристика поля F_1 равна 3, то $\bar{\sigma}^3 = 1$, откуда $\bar{\sigma}_1^3 = 1$, и, значит, $\sigma_1^3 = 1_{V_1}$, так как $\operatorname{res} \sigma_1 = 2$. Далее, $(\sigma_1|_{R_1})^3 = 1_{R_1}$, поэтому преобразование $\sigma_1|_{R_1}$ унипотентно на плоскости R_1. Отсюда следует, что $\sigma_1|_{R_1}$ — трансвекция, а значит, и σ_1 — трансвекция, так как $R_1 \cap P_1 = 0$. Но это

невозможно, поскольку $\operatorname{res}\sigma_1 = 2$. С другой стороны, если характеристика поля F_1 не равна 3, то мы используем тот факт, что ввиду 5.1.7 группа $\langle (C_V(\bar\sigma))^3\rangle$ абелева. Группа $\langle (C(\bar\sigma))^3\rangle$ тогда также абелева, следовательно, и группа $\langle (C(\bar\sigma_1))^3\rangle$ абелева. Но $C(\sigma_1)$ заведомо содержит неперестановочные трансвекции, и их кубы также неперестановочны, поскольку характеристика не равна 3. Снова получаем противоречие.

2b) Пусть теперь характеристика поля F не равна 2, а $F_1 = \mathbb{F}_2$. Зафиксируем гиперплоскость H_1 в V_1, пусть L_1 — переменная прямая в H_1. Так как группа $D\Delta_1$ богата проективными трансвекциями, то существует трансвекция $\tau_1 \in G_1$ с пространствами $L_1 \subseteq H_1$, такая, что $\bar\tau_1 \in D\Delta_1$. Прообраз $\Lambda^{-1}\bar\tau_1$ лежит в $D\Delta = \overline{DG}$, поэтому имеет в DG представитель σ, в частности, $\det\sigma = 1$. Далее, $\tau_1^2 = 1_{V_1}$, так как τ_1 — трансвекция в характеристике 2, поэтому $\sigma^2 = \alpha 1_V$ и $\alpha^3 = 1$. Заменив τ_1 на τ_1^3, можно считать, что на самом деле $\sigma^2 = 1_V$. Гиперплоскость H_1 содержит по крайней мере четыре различные прямые, поэтому в группе G_1 можно найти различные попарно перестановочные трансвекции $\tau_1, \ldots, \tau_5 = 1$, для которых соответствующие $\sigma_1, \ldots, \sigma_5 = 1_V$ являются попарно проективно перестановочными инволюциями с определителем 1. Как легко следует из 1.3.7, инволюции $-\sigma_1, \ldots, -\sigma_4, \sigma_5$ имеют вычет $\leqslant 1$, поэтому, ввиду 5.1.5, $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$ попарно перестановочны. В силу 1.6.5

$$\operatorname{card}(\bar\sigma_1, \ldots, \bar\sigma_5) \leqslant 2^{3-1} = 4,$$

а это противоречит тому, что $\bar\tau_1, \ldots, \bar\tau_5$ различны.

3) Пусть обе размерности равны 3. В силу 5.3.6 существует трансвекция $\tau \in G$ с $\tau \in DC(\tau)$. В частности, $\tau \in DG$ и $\operatorname{res}\tau = 1$. Так как $\bar\tau \in DC(\bar\tau)$, то

$$\Lambda\bar\tau \in DC(\Lambda\bar\tau) \subseteq D\Delta_1 = \overline{DG}_1.$$

Следовательно, можно выбрать такой элемент $\tau_1 \in DG_1$, что $\Lambda\bar\tau = \tau_1$ и $\bar\tau_1 \in DC(\bar\tau_1)$.

3a) Если по крайней мере одна из характеристик $\neq 2, 3$, то можно считать, что такова характеристика поля F. Тогда, согласно 5.3.14, τ_1^{18} является трансвекцией. Остается заменить τ на τ^{18}.

3b) Если обе характеристики равны 3, то в силу 5.3.14 τ_1^2 является трансвекцией. Заменим τ на τ^2.

3c) Если обе характеристики равны 2, рассуждаем точно так же, используя τ_1^9.

3d) Осталось разобрать случай, когда одна характеристика равна 3, а другая — 2. Можно считать, что характеристику 3 имеет поле F, а 2 — поле F_1. Если $F_1 \neq \mathbb{F}_2$, то поступаем, как в пункте 2b). Пусть $F_1 = \mathbb{F}_2$. Тогда $\Delta_1 = \boldsymbol{PSL}_3(V_1)$, так что $\operatorname{card} \Delta_1 = 168$ по теореме 3.1.2. Если $F = \mathbb{F}_3$, то $\boldsymbol{PSL}_3(V) \subseteq \subseteq \Delta \subseteq \boldsymbol{PGL}_3(V)$ и $\operatorname{card} \boldsymbol{PSL}_3(V) = 5616$, так что в этом случае изоморфизм $\Lambda\colon \Delta \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1$ невозможен. Если $\operatorname{card} F > 3$, то V содержит $q^2 + q + 1$ прямых, где $q = \operatorname{card} F$, поэтому имеет по крайней мере 91 прямую. Отсюда следует, что Δ имеет по крайней мере 182 проективные трансвекции и, значит, изоморфизм Λ снова невозможен. Предложение доказано.

5.4.3. *Если $n \geqslant 3$, $n_1 \geqslant 3$, то Λ сохраняет проективные трансвекции.*

Доказательство. 1) Заметим сначала, что если Λ сохраняет проективную трансвекцию $\bar{\sigma} \in \Lambda$ и $\bar{\tau}$ — произвольная проективная трансвекция из Δ с теми же пространствами, что и $\bar{\sigma}$, то Λ сохраняет $\bar{\tau}$, причем пространства у $\Lambda\bar{\tau}$ те же, что и у $\Lambda\bar{\sigma}$. Это следует из включения

$$\Lambda\bar{\tau} \in \Lambda\Delta(R, P) = \Lambda CC(\bar{\sigma}) = CC(\Lambda\bar{\sigma}) = \Delta_1(R_1, P_1)$$

($\Lambda\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1$), которое вытекает из 5.3.8.

2) Далее, заметим, что если Λ сохраняет проективные трансвекции $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ из Δ и $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$ имеют одинаковые неподвижные гиперплоскости, то у $\Lambda\bar{\sigma}$, $\Lambda\bar{\tau}$ совпадают либо неподвижные гиперплоскости, либо вычетные прямые. В самом деле, ввиду п. 1) можно считать, что $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ имеют различные вычетные прямые. Существует база $x_1, \ldots, x_n$ пространства V и сопряженная база $\rho_1, \ldots, \rho_n$ пространства V', такие, что

$$\bar{\sigma} = \bar{\tau}_{x_1, \rho_n}, \quad \bar{\tau} = \bar{\tau}_{x_2, \rho_n}.$$

Пусть $\bar{\tau}_{\alpha x_1, \rho_2}$ — нетривиальная проективная трансвекция из Δ. Тогда

$$\bar{\tau}_{\alpha x_1, \rho_n} = [\bar{\tau}_{\alpha x_1, \rho_2}, \bar{\tau}_{x_2, \rho_n}]$$

— нетривиальная проективная трансвекция из Δ с теми же пространствами, что и у $\bar{\sigma}$, поэтому ввиду 1) $\Lambda\bar{\tau}_{\alpha x_1, \rho_n}$ — проективная трансвекция из Δ_1 с теми же пространствами, что и у $\Lambda\bar{\sigma}$. Но

$$(\Lambda\bar{\tau}_{\alpha x_1, \rho_n}) \cdot (\Lambda\bar{\tau}) = (\Lambda\bar{\tau}_{\alpha x_1, \rho_2}) \cdot (\Lambda\bar{\tau}) \cdot (\Lambda\bar{\tau}_{\alpha x_1, \rho_2})^{-1}$$

в силу приведенного выше коммутаторного соотношения, поэтому выражение в левой части есть проективная трансвекция. Ввиду 1.6.1, у проективных трансвекций $\Lambda\bar{\tau}_{\alpha x_1, \rho_n}$, $\Lambda\bar{\tau}$ со-

впадают либо неподвижные гиперплоскости, либо вычетные прямые. Следовательно, это же справедливо и для $\Lambda\bar{\sigma}$, $\Lambda\bar{\tau}$.

3) Покажем теперь, что если Λ сохраняет нетривиальную проективную трансвекцию $\bar{\sigma}\in\Delta$, то Λ сохраняет все проективные трансвекции группы Δ с той же неподвижной гиперплоскостью, что и у $\bar{\sigma}$. Пусть $\bar{\tau}$ — такая трансвекция. Мы можем снова считать, что выбрана база, в которой

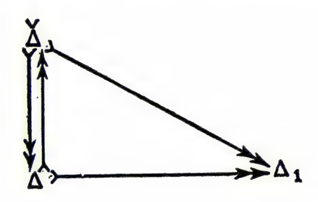
$$\bar{\sigma}=\bar{\tau}_{x_1,\,\rho_n},\qquad \bar{\tau}=\bar{\tau}_{x_2,\,\rho_n}.$$

Пусть $\bar{\tau}_{\alpha x_2,\,\rho_1}$ — нетривиальная проективная трансвекция из Δ. Тогда

$$\bar{\tau}_{\alpha x_2,\,\rho_n}=\left[\bar{\tau}_{\alpha x_2,\,\rho_1},\ \bar{\tau}_{x_1,\,\rho_n}\right]=\left(\bar{\tau}_{\alpha x_2,\,\rho_1}\bar{\tau}_{x_1,\,\rho_n}\bar{\tau}^{-1}_{\alpha x_2,\,\rho_1}\right)\bar{\tau}^{-1}_{x_1,\,\rho_n}=$$
$$=\bar{\tau}_{x_1+\alpha x_2,\,\rho_n}\bar{\tau}^{-1}_{x_1,\,\rho_n}.$$

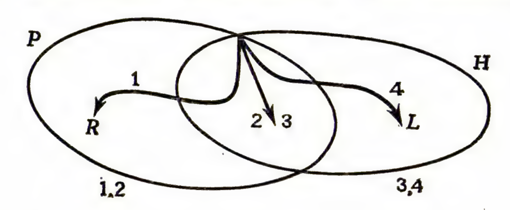
Очевидно, что проективные трансвекции $\bar{\tau}_{x_1+\alpha x_2,\,\rho_n}$ и $\bar{\tau}_{x_1,\,\rho_n}=\bar{\sigma}$ сопряжены в Δ и имеют одинаковые неподвижные гиперплоскости. По предположению $\Lambda\bar{\sigma}$ — проективная трансвекция, поэтому и $\Lambda\bar{\tau}_{x_1+\alpha x_2,\,\rho_n}$—проективная трансвекция, причем в силу п. 2) она имеет ту же вычетную прямую или ту же неподвижную гиперплоскость, что и $\Lambda\bar{\sigma}$. Следовательно, $\Lambda\bar{\tau}_{\alpha x_2,\,\rho_n}$, будучи произведением проективных трансвекций, у которых совпадают либо прямые, либо гиперплоскости, является проективной трансвекцией. Поэтому ввиду 1) преобразование $\Lambda\bar{\tau}=\Lambda\bar{\tau}_{x_2,\,\rho_n}$ является проективной трансвекцией.

4) Если изоморфизм Λ сохраняет нетривиальную проективную трансвекцию $\bar{\sigma}\in\Delta$, то он сохраняет все проективные трансвекции из Δ, у которых вычетные прямые такие же, как у $\bar{\sigma}$. Для доказательства надо воспользоваться двойственностью



5) Λ сохраняет по крайней мере одну нетривиальную проективную трансвекцию $\bar{\sigma}\in\Delta$ в силу 5.4.2. Пусть $\bar{\tau}$ — любая другая нетривиальная трансвекция из Δ. Пусть $L\subseteq H$ — ее пространства. Так как Λ сохраняет $\bar{\sigma}$, то, согласно 3), Λ сохраняет и проективные трансвекции из Δ, у которых неподвижная гиперплоскость такая же, как у $\bar{\sigma}$, а вычетная

прямая содержится в $P \cap H$. Следовательно, согласно 4), Λ сохраняет некоторую проективную трансвекцию из Δ с вы-



четной прямой из $P \cap H$ и неподвижной гиперплоскостью H. Отсюда ввиду 3) следует, что Λ сохраняет $\bar{\tau}$. Таким образом, Λ сохраняет все проективные трансвекции из Δ. По той же причине Λ^{-1} сохраняет все проективные трансвекции из Δ_1. Значит, Λ сохраняет проективные трансвекции, что и требовалось доказать.

§ 5.5. Теоремы об изоморфизмах в общем случае

Вернемся к общей ситуации, т. е. когда G — произвольная подгруппа в $\boldsymbol{\Gamma L}_n(V)$, богатая трансвекциями, а Δ — произвольная подгруппа в $\boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$, богатая проективными трансвекциями. Аналогичные условия налагаются, когда речь идет о V_1, n_1, F_1, G_1, Δ_1. Пусть $\Psi\colon G \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow G_1$, $\Lambda\colon \Delta \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1$ — изоморфизмы групп.

Обозначим через $\mathscr{L}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{X}$ подмножества

$$\mathscr{L} = P^1(V), \quad \mathscr{H} = P^{n-1}(V), \quad \mathscr{X} = \mathscr{L} \cup \mathscr{H}$$

проективного пространства $P(V)$, т. е. $\mathscr{L}$ — множество прямых из V, $\mathscr{H}$ — множество гиперплоскостей, $\mathscr{X}$ — объединение этих множеств. Очевидно, $\mathscr{L} \cap \mathscr{H} = \varnothing$ при $n \geqslant 3$ и $\mathscr{L} = \mathscr{H}$ при $n = 2$. Мы не рассматриваем случай $n = 1$, когда богатые группы не определены.

Для всяких $L \in \mathscr{L}$, $H \in \mathscr{H}$, таких, что $L \subseteq H$, определим $\Delta(L, H)$ как группу, состоящую из 1 и всех проективных трансвекций из Δ с пространствами L, H. Это согласуется с использованием обозначения $\Delta(L, H)$ в более частной ситуации § 5.3 и 5.4.

Для всякого $L \in \mathscr{L}$ определим $\Delta(L)$ как группу, состоящую из 1 и всех проективных трансвекций из Δ с вычетной прямой L. Пусть $\Delta(H)$ — группа, состоящая из 1 и всех проективных трансвекций из Δ с неподвижной гиперплоскостью H. Для всякого $X \in \mathscr{X}$ определим $\Delta(X)$ так: если $X = L \in \mathscr{L}$, то $\Delta(X) = \Delta(L)$, а если $X = H \in \mathscr{H}$, то $\Delta(X) = \Delta(H)$. Очевидно, эти два определения для $\Delta(X)$ совпадают при $n = 2$.

Придерживаясь соглашения, введенного в § 5.3 и 5.4, мы обозначаем через C централизатор C_{Δ}, C_G, $C_{\check{\Delta}}$, $C_{\check{G}}$, когда мы имеем дело с группами Δ, G, $\check{\Delta}$, $\check{G}$ соответственно.

Множества $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{X}_1$, $\Delta_1(L_1, H_1)$, $\Delta_1(L_1)$, $\Delta_1(H_1)$, $\Delta_1(X_1)$, C определяются аналогично в случае группы Δ_1.

Если $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ — нетривиальные проективные трансвекции из Δ, то, применяя 5.3.4 к богатой группе $\Delta \cap \boldsymbol{PGL}_n(V)$, получаем, что

$$C(\bar{\sigma}_1) = C(\bar{\sigma}_2) \Rightarrow R_1 = R_2 \quad \text{и} \quad P_1 = P_2.$$

5.5.1. *Предположим, что* $n \geqslant 3$. *Если* Δ^* — *подгруппа из* $\Delta \cap \boldsymbol{PGL}_n(V)$, *богатая проективными трансвекциями, и* $\bar{\sigma}$ — *нетривиальная проективная трансвекция из* Δ^*, *то* $C_{\Delta}C_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \Delta(R, P)$. *В частности,* $CC(\bar{\sigma}) \subseteq \Delta(R, P)$ *для всякой нетривиальной проективной трансвекции из* Δ.

Доказательство. Положим $\Delta^{**} = \Delta \cap \boldsymbol{PGL}_n(V)$. Тогда Δ^{**} богата проективными трансвекциями и $\Delta^* \subseteq \Delta^{**}$. Поэтому ввиду 5.3.8

$$\Delta(R, P) = \Delta^{**}(R, P) = C_{\Delta^{**}}C_{\Delta^{**}}(\bar{\sigma}) \subseteq C_{\Delta}C_{\Delta^{**}}(\bar{\sigma}) \subseteq C_{\Delta}C_{\Delta^*}(\bar{\sigma}).$$

Для доказательства обратного включения поступаем, как при доказательстве 5.3.8, используя 4.3.2 и результаты § 4.4. Наконец, если $\bar{\sigma}$ — произвольная нетривиальная проективная трансвекция из Δ, то $\bar{\sigma} \in \Delta^{**}$ и $C(\bar{\sigma}) \supseteq C_{\Delta^{**}}(\bar{\sigma})$, поэтому

$$CC(\bar{\sigma}) \subseteq C_{\Delta}C_{\Delta^{**}}(\bar{\sigma}) = \Delta(R, P).$$

5.5.2. Пример. Покажем, что утверждения

$$C(\bar{\sigma}_1) = C(\bar{\sigma}_2) \Leftrightarrow R_1 = R_2 \quad \text{и} \quad P_1 = P_2$$

и

$$CC(\bar{\sigma}) = \Delta(R, P),$$

справедливые для проективных трансвекций в частной ситуации § 5.3 и 5.4, уже не выполняются здесь. Для этого рассмотрим группу $\Delta = \boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$ при $n \geqslant 3$ над полем F, допускающим нетривиальный автоморфизм μ. Пусть элемент $\alpha \in F$ таков, что $\alpha^{\mu} \neq \alpha$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — база пространства V, $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — сопряженная база, k — элемент группы $\boldsymbol{\Gamma L}_n(V)$ с ассоциированным автоморфизмом поля μ и матрицей

$$\operatorname{diag}(\alpha, 1, \ldots, 1, \alpha)$$

в базе $x_1, \ldots, x_n$. Легко проверить, что

$$\mu\rho_n k^{-1} = \alpha^{-1}\rho_n.$$

Поэтому, согласно § 4.4,

$$k\tau_{x_1,\rho_n}k^{-1}=\tau_{x_1,\rho_n}$$

и

$$k\tau_{\alpha x_1,\rho_n}k^{-1}=\tau_{\alpha\mu x_1,\rho_n}\neq\tau_{\alpha x_1,\rho_n}.$$

Другими словами, $\bar{k}$ перестановочно с $\bar{\tau}_{x_1,\rho_n}$, но не перестановочно с $\bar{\tau}_{\alpha x_1,\rho_n}$. В частности, Δ содержит две проективные трансвекции с одинаковыми пространствами, но с различными централизаторами. Более того, $\bar{\tau}_{\alpha x_1,\rho_n}$ лежит в $\Delta(R, P)$ (где $\bar{\sigma}=\bar{\tau}_{x_1,\rho_n}$), но не лежит в $CC(\bar{\sigma})$, так как не перестановочно с $\bar{k}\in CC(\bar{\sigma})$.

5.5.3. *Если $n\geqslant 3$, $n_1\geqslant 2$, то существует подгруппа Δ^0 группы Δ, богатая проективными трансвекциями и удовлетворяющая условиям*

$$\Delta^0\subseteq \boldsymbol{PSL}_n(V),\quad \Lambda\Delta^0\subseteq \boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1).$$

Доказательство. 1) Покажем сначала, что Λ отображает в $\boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1)$ по крайней мере одну нетривиальную проективную трансвекцию из Δ. Начнем с произвольной нетривиальной проективной трансвекции $\bar{\tau}\in\Delta$. Так как $\Lambda\Delta=\Delta_1$ и Δ_1 богата, то существует такой элемент $\bar{\psi}\in\Delta$, что $\Lambda\bar{\psi}$ лежит в $\boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1)$ (на самом деле $\Lambda\bar{\psi}$ — проективная трансвекция из Δ_1) и не перестановочен с $\Lambda\bar{\tau}$ (применить 5.2.6 к группе, порожденной всеми проективными трансвекциями из Δ_1). Пусть $\bar{\sigma}=\bar{\psi}\bar{\tau}\bar{\psi}^{-1}\bar{\tau}^{-1}\in\Delta$. Тогда $\bar{\sigma}\in\boldsymbol{PSL}_n(V)$ и $\Lambda\bar{\sigma}\in\boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1)$ в силу 4.3.1. Кроме того, $\bar{\sigma}$ и $\Lambda\bar{\sigma}$ нетривиальны по выбору $\Lambda\bar{\psi}$. Очевидно, $\bar{\sigma}$ имеет представитель $\sigma\in\boldsymbol{SL}_n(V)$, для которого $1\leqslant\operatorname{res}\sigma\leqslant 2$. Если $\operatorname{res}\sigma=1$, то все доказано. Пусть $\operatorname{res}\sigma=2$. Используя „второй трюк" из доказательства теоремы 3.4.1, найдем такую проективную трансвекцию $\bar{\tau}_{a,\rho}\in\Delta$, что $\bar{\sigma}\bar{\tau}_{a,\rho}\bar{\sigma}^{-1}\bar{\tau}_{a,\rho}^{-1}$ — нетривиальная проективная трансвекция из Δ. Тогда

$$\Lambda(\bar{\sigma}\bar{\tau}_{a,\rho}\bar{\sigma}^{-1}\bar{\tau}_{a,\rho}^{-1})\in\boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1),$$

и снова все доказано.

2) Заметим теперь, что если Λ отображает нетривиальную проективную трансвекцию $\bar{\sigma}\in\Delta$ в группу $\boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1)$, то для каждой прямой $L\subseteq P$ существует по крайней мере одна нетривиальная проективная трансвекция $\bar{\tau}\in\Delta$ с пространствами $L\subseteq P$, такая, что $\Lambda\bar{\tau}$ лежит в $\boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1)$. При доказатель-

стве этого утверждения можно считать, что $L \neq Fx_1$. Выберем базу $x_1, \ldots, x_n$ пространства V и сопряженную базу $\rho_1, \ldots, \rho_n$ так, чтобы было $\bar\sigma = \bar\tau_{x_1, \rho_n}$, $L = Fx_2$. Пусть элемент $\alpha \in \dot F$ таков, что $\bar\tau_{\alpha x_2, \rho_1} \in \Delta$. Тогда наше утверждение следует из коммутаторного соотношения

$$\bar\tau_{\alpha x_2, \rho_n} = [\bar\tau_{\alpha x_2, \rho_1}, \bar\tau_{x_1, \rho_n}].$$

3) В силу двойственности, если Λ отображает нетривиальную проективную трансвекцию $\bar\sigma \in \Delta$ в $\boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1)$, то для каждой гиперплоскости H, содержащей R, существует по крайней мере одна нетривиальная проективная трансвекция $\bar\tau \in \Delta$ с пространствами $R \subseteq H$, такая, что $\Lambda\bar\tau$ лежит в $\boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1)$.

4) Утверждение теперь легко доказывается при помощи рассуждений п. 5) доказательства 5.4.3.

5.5.4. *Если $n \geqslant 3$, $n_1 \geqslant 2$, то существует подгруппа G^0 группы G, богатая трансвекциями и удовлетворяющая условию*

$$G^0 \subseteq \boldsymbol{SL}_n(V), \quad \Psi G^0 \subseteq \boldsymbol{SL}_{n_1}(V_1).$$

Доказательство аналогично доказательству 5.5.3. Нужно только проследить в начале п. 1) за выбором нетривиальной трансвекции $\tau \in G$ с условием $\Psi\tau \notin \boldsymbol{RL}_{n_1}(V_1)$. Существование такой трансвекции τ легко следует из коммутаторных соотношений для элементарных трансвекций.

5.5.5. *При $n \geqslant 3$, $n_1 \geqslant 3$ изоморфизм Λ сохраняет проективные трансвекции.*

Доказательство. 1) Применение 5.5.3 к Λ дает подгруппу Δ^0 группы $\Delta \cap \boldsymbol{PSL}_n(V)$, богатую проективными трансвекциями и такую, что $\Lambda\Delta^0 \subseteq \Delta_1 \cap \boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1)$. Применение 5.5.3 к Λ^{-1} дает подгруппу Δ_1^0 группы $\Delta_1 \cap \boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1)$, богатую проективными трансвекциями и такую, что $\Lambda^{-1}\Delta_1^0 \subseteq \Delta \cap \boldsymbol{PSL}_n(V)$. Тогда группы

$$\Delta^* = \langle \Delta^0, \Lambda^{-1}\Delta_1^0 \rangle, \quad \Delta_1^* = \langle \Lambda\Delta^0, \Delta_1^0 \rangle$$

удовлетворяют условиям

$$\Delta^0 \subseteq \Delta^* \subseteq \Delta \cap \boldsymbol{PSL}_n(V),$$
$$\Delta_1^0 \subseteq \Delta_1^* \subseteq \Delta_1 \cap \boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1)$$

и, в частности, богаты проективными трансвекциями. Кроме того, $\Lambda\colon \Delta^* \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1^*$.

2) Рассмотрим теперь произвольную проективную трансвекцию $\bar{\sigma} \in \Delta$. Пусть $\bar{\sigma}^*$ — проективная трансвекция в Δ^* с теми же пространствами $R \subseteq P$, что и $\bar{\sigma}$. Ввиду 5.4.3 $\bar{\sigma}_1^* = \Lambda\bar{\sigma}^*$ является проективной трансвекцией. В силу 5.5.1

$$\Lambda\bar{\sigma} \in \Lambda\Delta(R, P) = \Lambda C_{\Delta} C_{\Delta^*}(\bar{\sigma}^*) = C_{\Delta_1} C_{\Delta_1^*}(\bar{\sigma}_1^*) = \Delta_1(R_1^*, P_1^*),$$

поэтому $\Lambda\bar{\sigma}$ — также проективная трансвекция. Значит, Λ сохраняет все проективные трансвекции из Δ. По симметрии Λ^{-1} сохраняет все проективные трансвекции из Δ_1. Следовательно, Λ сохраняет проективные трансвекции.

5.5.6. *При* $n \geqslant 3$, $n_1 \geqslant 3$ *имеем* $\Psi(G \cap \boldsymbol{RL}_n(V)) = G_1 \cap \boldsymbol{RL}_{n_1}(V_1)$.

Доказательство. Поступая, как в п. 1) доказательства 5.5.5, можно найти подгруппы $G^* \subseteq G \cap \boldsymbol{SL}_n(V)$ и $G_1^* \subseteq G_1 \cap \boldsymbol{SL}_{n_1}(V_1)$, богатые трансвекциями и такие, что $\Psi: G^* \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow G_1^*$. Далее, для всякого $\sigma \in G \cap \boldsymbol{RL}_n(V)$ имеем $\sigma \in C(G^*)$, откуда $\Psi\sigma \in C(G_1^*)$, поэтому $\Psi\sigma$ лежит в централизаторе группы G_1^* в $\boldsymbol{\Gamma L}_{n_1}(V_1)$. Но группа G_1^* богата трансвекциями, поэтому, согласно 5.2.6, $\Psi\sigma \in \boldsymbol{RL}_{n_1}(V_1)$. Следовательно, $\Psi(G \cap \boldsymbol{RL}_n(V)) \subseteq G_1 \cap \boldsymbol{RL}_{n_1}(V_1)$. Равенство следует из рассмотрения Ψ^{-1} вместо Ψ.

На протяжении этих лекций V обозначает n-мерное векторное пространство над полем F, $1 \leqslant n < \infty$, и Δ — подгруппа из $\boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$ (или из $\boldsymbol{PGL}_n(V)$ в § 5.3 и 5.4), богатая проективными трансвекциями. Чтобы упростить формулировки исключительных ситуаций, мы будем говорить, например, что Δ есть $\boldsymbol{PSL}_2$ над $\mathbb{F}_7$, если $F = \mathbb{F}_7$, $n = 2$ и $\Delta = \boldsymbol{PSL}_2(V)$. Аналогично для $\boldsymbol{PSL}_3$ над $\mathbb{F}_2$ и т. д.

5.5.7. *При* $n \geqslant 3$, $n_1 = 2$ *не существует изоморфизма* $\Lambda: \Delta \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1$, *за исключением, возможно, случая, когда* Δ *есть* $\boldsymbol{PSL}_3$ *над* $\mathbb{F}_2$, *а* Δ_1 *есть* $\boldsymbol{PSL}_2$ *над* $\mathbb{F}_7$.

Доказательство. Предположим, что имеется изоморфизм $\Lambda: \Delta \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1$ при $n \geqslant 3$, $n_1 = 2$. В силу 5.5.3 существует подгруппа Δ^0 группы $\Delta \cap \boldsymbol{PSL}_n(V)$, богатая трансвекциями и такая, что $\Lambda\Delta^0 \subseteq \boldsymbol{PSL}_2(V_1)$.

1) Предположим, что характеристика поля F отлична от 2. Ввиду 5.3.6 (проективного варианта) существует нетривиальная проективная трансвекция $\bar{\sigma} \in \Delta^0$, такая, что $DC_{\Delta^0}(\bar{\sigma}) \neq 1$. Так как $\Lambda\Delta^0 \subseteq \boldsymbol{PSL}_2(V_1)$, то существует элемент $\sigma_1 \in \boldsymbol{SL}_2(V_1)$, такой, что $\Lambda\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1$ и $DC_{V_1}(\bar{\sigma}_1) \neq 1$. В силу 5.1.6 имеем $C_{V_1}(\bar{\sigma}_1) \subseteq \overline{C_{V_1}(\sigma_1^2)}$, поэтому $DC_{V_1}(\bar{\sigma}_1) \subseteq \overline{DC_{V_1}(\sigma_1^2)}$. Но $\bar{\sigma}^2 \neq 1$, так как $\bar{\sigma}$ — проективная трансвекция и характеристика поля F отлична от 2. Поэтому $\sigma_1^2 \in \boldsymbol{GL}_2(V_1) - \boldsymbol{RL}_2(V_1)$, откуда ввиду

5.1.1 $DC_{V_1}(\sigma_1^2) = 1$ и, значит, $DC_{V_1}(\bar\sigma_1) = 1$. Противоречие. Следовательно, характеристика поля F должна равняться 2.

2) Предположим, что характеристика полей F и F_1 равна 2. Пусть снова $\bar\sigma$ — нетривиальная проективная трансвекция из Δ^0, такая, что $DC_{\Delta^0}(\bar\sigma) \neq 1$. Снова имеем $\Lambda\Delta^0 \subseteq \boldsymbol{PSL}_2(V_1)$, и существует $\sigma_1 \in \boldsymbol{SL}_2(V_1)$ с $\Lambda\bar\sigma = \bar\sigma_1$. Но в нашем случае $\bar\sigma^2 = 1$, поэтому $\sigma_1^2 = \alpha 1_{V_1}$ с $\alpha^2 = (\det \sigma_1)^2 = 1$. Следовательно, σ_1 — нетривиальный элемент из $\boldsymbol{SL}_2(V_1)$ с $\sigma_1^2 = 1_{V_1}$. Так как F_1 имеет характеристику 2, то элемент σ_1 унипотентен и поэтому является трансвекцией. В силу 5.3.1 и 5.1.1

$$DC_{\Lambda\Delta^0}(\bar\sigma_1) \subseteq DC_{V_1}(\bar\sigma_1) = \overline{DC_{V_1}(\sigma_1)} = 1,$$

что противоречит соотношению $DC_{\Delta^0}(\bar\sigma) \neq 1$. Следовательно, рассматриваемый случай также невозможен.

3) Предположим, что характеристика поля F равна 2, а характеристика поля F_1 отлична от 2, но исключим случай $n = 3$, $F = \mathbb{F}_2$. Рассмотрим произвольную нетривиальную проективную трансвекцию $\bar\sigma \in \Delta^0$. Тогда $\bar\sigma^2 = 1$ и $\bar\sigma \neq 1$. Имеем $\Lambda\bar\sigma = \bar\sigma_1$, где σ_1 — некоторый элемент из $\boldsymbol{SL}_2(V_1)$. Далее, $\bar\sigma_1^2 = 1$ и $\bar\sigma_1 \neq 1$. Таким образом, $\sigma_1^2 = \alpha 1_{V_1}$ для некоторого $\alpha \in \dot F_1$. Но $\det \sigma_1 = 1$, поэтому $\alpha^2 = 1$, т. е. $\alpha = \pm 1$. Значит, $\sigma_1^2 = \pm 1_{V_1}$. Равенство $\sigma_1^2 = 1_{V_1}$ не может выполняться, так как из него, предложения 1.6.5 и равенства $\det \sigma_1 = 1$ следовало бы $\bar\sigma_1 = 1$. Поэтому $\sigma_1^2 = -1_{V_1}$. Другими словами, каждой нетривиальной проективной трансвекции $\bar\sigma \in \Delta^0$ можно сопоставить такой элемент $\sigma_1 \in \boldsymbol{SL}_2(V_1)$, что

$$\bar\sigma_1 = \Lambda\bar\sigma \neq 1,$$
$$\sigma_1^2 = -1_{V_1}, \quad \det \sigma_1 = 1.$$

Далее, всякая гиперплоскость пространства V содержит по крайней мере пять различных прямых, поэтому в Δ^0 имеется пять различных нетривиальных попарно перестановочных проективных трансвекций. Таким образом, в группе $\boldsymbol{SL}_2(V_1)$ существуют такие элементы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$, что соответствующие им элементы $\bar\sigma_i$ различны, нетривиальны, попарно перестановочны и

$$\sigma_i^2 = -1_{V_1}, \quad \det \sigma_i = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant 5.$$

Ввиду проективной перестановочности

$$\sigma_i \sigma_j = \pm \sigma_j \sigma_i$$

для всех i, j. Поэтому существует такая база пространства V_1, в которой σ_1 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а σ_i — матрицы

$$\begin{pmatrix} p_i & q_i \\ q_i & -p_i \end{pmatrix}$$

для подходящих скаляров из F_1, $2 \leqslant i \leqslant 5$. Так как $\bar{\sigma}_i$ различны, то самое большее один из элементов p_i $(2 \leqslant i \leqslant 5)$ может равняться нулю, поэтому можно считать, что $\bar{\sigma}_2$, $\bar{\sigma}_3$, $\bar{\sigma}_4$ имеют представители σ_2', σ_3', σ_4' с матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & -1 \end{pmatrix},$$

где α, β, γ различны. Кроме того, можно считать, что $1 + \alpha\beta \neq 0$. Но тогда $\bar{\sigma}_2$ и $\bar{\sigma}_3$ не перестановочны. Противоречие. Поэтому рассматриваемый случай также невозможен.

4) Наконец, предположим, что $n = 3$, $F = \mathbb{F}_2$ и характеристика поля F_1 отлична от 2. Тогда, очевидно, $\boldsymbol{P\Gamma L}_3(V) = \boldsymbol{PSL}_3(V) = \Delta = \Delta^0$. В частности, $\operatorname{card} \Delta = 168$ ввиду 3.1.2. Кроме того, $\Lambda\Delta = \Delta_1$ — подгруппа в $\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$, богатая проективными трансвекциями. Пусть p — характеристика поля F_1, $q = \operatorname{card} F_1$. Очевидно, $q < \infty$, поэтому $p > 0$. Пусть G_1 — подгруппа из $\boldsymbol{SL}_2(V_1)$, богатая трансвекциями, для которой $PG_1 = \Delta_1$. Пространство V_1 содержит $q + 1$ различных прямых, и мы видим, рассматривая подходящие степени, что существует по крайней мере $p - 1$ различных нетривиальных трансвекций в G_1 с данной прямой, поэтому G_1 содержит по крайней мере $(p-1)(q+1)$ различных нетривиальных трансвекций. Далее, если зафиксировать прямую L и рассмотреть произведения $\tau_L\tau_K$, где τ_L пробегает все нетривиальные трасвекции в G_1 с прямой L, а τ_K пробегает все нетривиальные трансвекции в G_1 с прямыми K, отличными от L, то мы получим по крайней мере $(p-1)^2 q$ различных элементов, не являющихся трансвекциями (применить 1.4.8). Поэтому

$$\operatorname{card} G_1 \geqslant (p-1)(q+1) + (p-1)^2 q + 1.$$

Но ядро $P|_{\boldsymbol{SL}_2(V_1)}$ имеет 2 элемента, поэтому

$$\operatorname{card} \Delta_1 \geqslant \frac{p}{2}((p-1)q + 1).$$

В частности, $p \leqslant 7$, так как $\operatorname{card} \Delta_1 = 168$. Таким образом, F_1 может быть только одним из полей $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{F}_9$, $\mathbb{F}_{27}$. Но число $\operatorname{card} \Delta_1$ должно делить $\operatorname{card} \boldsymbol{PSL}_2(V_1)$, а из чисел 12, 60, 168, 360, 9828 на 168 делится только само это число.

5) Итак, мы показали, что если существует изоморфизм $\Lambda\colon \Delta \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1$, то $n=3$, $F=\mathbb{F}_2$ и $F_1=\mathbb{F}_7$. Напомним, что по исходному предположению $n_1=2$. Далее, $\boldsymbol{PSL}_3(V)$ — единственная 3-мерная группа над $\mathbb{F}_2$, богатая трасвекциями, поэтому $\Delta=\boldsymbol{PSL}_3$ над $\mathbb{F}_2$. В частности, $\operatorname{card}\Delta=168$, откуда $\operatorname{card}\Delta_1=168$. С другой стороны, всякая богатая двумерная группа над $\mathbb{F}_7$ должна содержать $\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$, так как $\mathbb{F}_7$ — простое поле. Следовательно, $\Delta_1 \supseteq \boldsymbol{PSL}_2(V_1)$. Но $\operatorname{card}\Delta_1=168= =\operatorname{card}\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$, поэтому $\Delta_1=\boldsymbol{PSL}_2$ над $\mathbb{F}_7$, что и требовалось доказать.

5.5.8. *При $n\geqslant 3$, $n_1=2$ не существует изоморфизма $\Psi\colon G \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow G_1$.*

Доказательство. Пусть, напротив, такой изоморфизм Ψ существует. Ввиду 5.5.4 в $G\cap \boldsymbol{SL}_n(V)$ существует подгруппа G^0, богатая трансвекциями и такая, что $\Psi G^0 \subseteq \subseteq \boldsymbol{SL}_2(V_1)$. Рассматривая две неперестановочные трансвекции из G^0, мы видим, что должна существовать нетривиальная трансвекция $\sigma\in G^0$, такая, что $\Psi\sigma\notin \boldsymbol{RL}_2(V_1)$. Применяя коммутаторное соотношение для элементарных трансвекций, получим $DC_{G^0}(\sigma)\neq 1_V$. Далее, $\sigma_1=\Psi\sigma$ лежит в $\boldsymbol{SL}_2(V_1)$ и $DC_{\Psi G^0}(\sigma_1)\neq 1_{V_1}$, т. е. $\sigma_1\in \boldsymbol{GL}_2(V_1)-\boldsymbol{RL}_2(V_1)$ и $DC_{V_1}(\sigma_1)\neq 1_{V_1}$, а это невозможно ввиду 5.1.1.

5.5.9. *Пусть $X, Y\in\mathscr{X}$, $L, K\in\mathscr{L}$, $H, J\in\mathscr{H}$, причем $L\subseteq H$, $K\subseteq J$. Тогда*

1) $\Delta(X)=\Delta(Y)\Leftrightarrow X=Y$,

2) $\Delta(L, H)=\Delta(K, J)\Leftrightarrow L=K$ *и* $H=J$,

3) $(\Delta(X))^{\vee}=\check{\Delta}(X^0)$,

4) $(\Delta(L, H))^{\vee}=\check{\Delta}(H^0, L^0)$,

5) $\Delta(X)\cap\Delta(Y)\supset 1 \Leftrightarrow X\subseteq Y$ *или* $Y\subseteq X$,

6) $\Delta(X)$ — *максимальная подгруппа в* Δ, *состоящая из проективных трансвекций,*

7) *всякая максимальная подгруппа проективных трансвекций из* Δ *имеет вид* $\Delta(X)$.

При $n\geqslant 3$, $n_1\geqslant 3$ изоморфизм Λ определяет следующее отображение $\pi\colon \mathscr{X}\to\mathscr{X}_1$. Для любого $X\in\mathscr{X}$ в силу 5.5.9 $\Delta(X)$ является максимальной подгруппой проективных трансвекций группы Δ, поэтому, согласно 5.5.5, $\Lambda\Delta(X)$ является максимальной подгруппой проективных трансвекций группы Δ_1. Следовательно, ввиду 5.5.9,

$$\Lambda\Delta(X)=\Delta_1(X_1)$$

для некоторого единственного $X_1\in\mathscr{X}_1$. Полагаем

$$\pi X=X_1.$$

5.5.10. *При* $n \geqslant 3$, $n_1 \geqslant 3$ *отображение* π *обладает следующими свойствами:*

1) $\pi\colon \mathscr{X} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathscr{X}_1$ *биективно,*

2) π *определяется равенствами* $\Lambda\Delta(X) = \Delta_1(\pi X)$ *для всех* $X \in \mathscr{X}$,

3) $(X \subseteq Y$ *или* $Y \subseteq X) \Leftrightarrow (\pi X \subseteq \pi Y$ *или* $\pi Y \subseteq \pi X)$,

4) $(\pi\mathscr{L} = \mathscr{L}_1$ *и* $\pi\mathscr{H} = \mathscr{H}_1)$ *или* $(\pi\mathscr{L} = \mathscr{H}_1$ *и* $\pi\mathscr{H} = \mathscr{L}_1)$.

Доказательство. Первые два утверждения очевидны, третье следует из п. 5) утверждения 5.5.9. Докажем четвертое утверждение.

Предположим, что $\pi L \in \mathscr{L}_1$ для некоторой прямой $L \in \mathscr{L}$, тогда ввиду 3) для всякой гиперплоскости $H \supseteq L$ либо $\pi L \subseteq \pi H$, либо $\pi L \supseteq \pi H$. Но $\pi L \neq \pi H$ в силу инъективности, поэтому $\pi L \subset \pi H$, так как πL — прямая. Другими словами, если $\pi L \in \mathscr{L}_1$ для некоторой прямой $L \in \mathscr{L}$, то $\pi H \in \mathscr{H}_1$ для всех гиперплоскостей H, содержащих L. Двойственное рассуждение показывает, что если $\pi H \in \mathscr{H}_1$ для некоторой гиперплоскости H, то $\pi L \in \mathscr{L}_1$ для всех прямых $L \subseteq H$. Аналогично, если $\pi L \in \mathscr{H}_1$ для некоторой прямой $L \in \mathscr{L}$, то $\pi H \in \mathscr{L}_1$ для всех гиперплоскостей H, содержащих L. Кроме того, если $\pi H \in \mathscr{L}_1$ для некоторого $H \in \mathscr{H}$, то $\pi L \in \mathscr{H}_1$ для всех прямых L, содержащихся в H.

Предположим теперь, что существует такая прямая L_0, что $\pi L_0 \in \mathscr{L}_1$. Тогда, включив L_0 и произвольную прямую L из V в гиперплоскость и применяя полученные выше результаты, видим, что $\pi\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}_1$. Применяя доказанное выше к произвольной гиперплоскости и одной из ее прямых, получаем $\pi\mathscr{H} \subseteq \mathscr{H}_1$. Но $\pi(\mathscr{L} \cup \mathscr{H}) = \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{H}_1$. Значит, $\pi\mathscr{L} = \mathscr{L}_1$ и $\pi\mathscr{H} = \mathscr{H}_1$.

Таким образом, можно предполагать, что $\pi\mathscr{L} \subseteq \mathscr{H}_1$. Тогда по указанной выше причине $\pi\mathscr{H} \subseteq \mathscr{L}_1$. Значит, $\pi\mathscr{L} = \mathscr{H}_1$ и $\pi\mathscr{H} = \mathscr{L}_1$, что и требовалось доказать.

5.5.11. *При* $n \geqslant 2$, $n_1 \geqslant 2$ *из существования изоморфизма* $\Lambda\colon \Delta \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1$ *следует, что* $n = n_1$, *за исключением, возможно, случая, когда одна из групп* Δ, Δ_1 *есть* $\boldsymbol{PSL}_3$ *над* $\mathbb{F}_2$, *а другая* — $\boldsymbol{PSL}_2$ *над* $\mathbb{F}_7$.

Доказательство. Ввиду 5.5.7 можно считать, что $n \geqslant 3$, $n_1 \geqslant 3$. Рассматривая, если необходимо, изоморфизм Λ^{-1}, можно считать, что $n \geqslant n_1 \geqslant 3$. В частности, отображение $\pi\colon \mathscr{X} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathscr{X}_1$ существует. Переходя, если нужно, к композиции

$$\Delta \overset{\Lambda}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} \Delta_1 \overset{\vee}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} \check{\Delta}_1,$$

можно считать, что

$$\pi\mathscr{L} = \mathscr{L}_1, \quad \pi\mathscr{H} = \mathscr{H}_1.$$

Для произвольного подпространства U из V положим

$$\Pi U = \sum_{L \subseteq U} \pi L.$$

В силу 5.5.10 отображение Π согласовано с π на $\mathscr{X} = \mathscr{L} \cup \mathscr{H}$. Кроме того,

$$U \subseteq W \Rightarrow \Pi U \subseteq \Pi W.$$

Рассматривая строго возрастающую цепочку $n+1$ подпространств из V, видим, что все будет доказано, если убедиться, что

$$U \subset W \Rightarrow \Pi U \subset \Pi W.$$

Рассмотрим для этого в пространстве V пару $U \subset W$ и выберем прямую L и гиперплоскость H, такие, что

$$L \subseteq W, \quad U \subseteq H, \quad L \nsubseteq H.$$

Тогда

$$\Pi L \subseteq \Pi W, \quad \Pi U \subseteq \Pi H, \quad \Pi L \nsubseteq \Pi H,$$

так как Π согласуется с π на L и H. Если $\Pi U = \Pi W$, то будем иметь

$$\Pi L \subseteq \Pi W = \Pi U \subseteq \Pi H,$$

чего не может быть. Значит, $\Pi U \subset \Pi W$, что и требовалось доказать.

5.5.12. *Предположим, что* $n \geqslant 3$, $n_1 \geqslant 3$ *и отображение* π, *ассоциированное с* Λ, *удовлетворяет условию*

$$\pi\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \quad \text{и} \quad \pi\mathscr{H} = \mathscr{H}_1.$$

Пусть Φ — *изоморфизм группы* Δ *в группу* $\boldsymbol{P\Gamma L}_{n_1}(V_1)$, *такой, что каждый элемент из* $\Phi\Delta(L)$ *является проективной трансвекцией с вычетной прямой* πL *для всех* $L \in \mathscr{L}$. *Тогда* $\Phi = \Lambda$.

Доказательство. Пусть k — произвольный элемент из Δ. Мы должны показать, что $\Phi k = \Lambda k$. Рассмотрим произвольную прямую L из V. Тогда πL — произвольная прямая из V_1. Пусть τ_L — проективная трансвекция из Δ с вычетной прямой L. Тогда, согласно § 4.4, $k\tau_L k^{-1}$ — проективная трансвекция из Δ с вычетной прямой kL. Обозначим ее через τ_{kL}. Далее, $\Phi\tau_L$ — проективная трансвекция из $\boldsymbol{P\Gamma L}_{n_1}(V_1)$ с вычетной прямой πL. Обозначим ее через $\tau_{\pi L}$. Аналогично $\Phi\tau_{kL}$ — проективная трансвекция из $\boldsymbol{P\Gamma L}_{n_1}(V_1)$ с вычетной прямой $\pi(kL)$ и, значит, можно написать $\Phi\tau_{kL} = \tau_{\pi(kL)}$. Имеем

$$\tau_{\pi(kL)} = \Phi(\tau_{kL}) = \Phi(k\tau_L k^{-1}) = (\Phi k)(\tau_{\pi L})(\Phi k)^{-1},$$

и поэтому

$$(\Phi k)(\pi L) = \pi(kL),$$

согласно § 4.4. Для Λ также имеем

$$(\Lambda k)(\pi L) = \pi(kL).$$

Следовательно,

$$(\Phi k)(\pi L) = (\Lambda k)(\pi L).$$

Другими словами, Φk и Λk согласованы на прямых из V_1. Поэтому $\Phi k = \Lambda k$ ввиду 1.1.2, т. е. $\Phi = \Lambda$.

5.5.13. Теорема. *Пусть Δ, Δ_1 — подгруппы из $\boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$, $\boldsymbol{P\Gamma L}_{n_1}(V_1)$ соответственно, богатые трансвекциями, и $n \geqslant 3$, $n_1 \geqslant 3$. Тогда всякий изоморфизм Λ: $\Delta \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1$ имеет точно одну из следующих двух форм: либо*

$$\Lambda k = gkg^{-1}, \quad k \in \Delta,$$

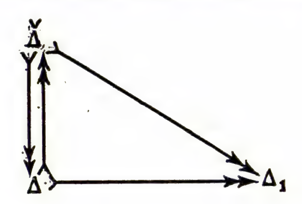
для некоторой единственной проективной коллинеации g пространства V на V_1, либо

$$\Lambda k = h\check{k}h^{-1}, \quad k \in \Delta,$$

для некоторой единственной проективной коллинеации h пространства V' на V_1.

Доказательство. Ввиду 5.5.11 имеем $n = n_1 \geqslant 3$.

1) Как показывает рассмотрение двойственной ситуации



в вопросе о существовании можно считать, что отображение π из 5.5.10 удовлетворяет условию

$$\pi\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \quad \text{и} \quad \pi\mathscr{H} = \mathscr{H}_1,$$

и достаточно доказать существование такого g, что $\Lambda k = gkg^{-1}$ для всех $k \in \Delta$.

Ввиду 5.5.10 для любых $L \in \mathscr{L}$, $H \in \mathscr{H}$ с $L \subseteq H$ имеем $\pi L \subseteq \pi H$. Поэтому применимо 4.2.4 и π можно единственным образом продолжить до проективности g: $P(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow P(V_1)$. По основной теореме проективной геометрии g является проективной коллинеацией. Далее, сужение

$$\Phi_g k = gkg^{-1}, \quad k \in \Delta,$$

отображения Φ_g из § 4.4 является изоморфизмом группы Δ в группу $\boldsymbol{P\Gamma L}_{n_1}(V_1)$. Кроме того, снова согласно § 4.4, для

любой прямой L из V группа $\Phi_g(\Delta(L))$ состоит из проективных трансвекций группы $\boldsymbol{P\Gamma L}_{n_1}(V_1)$ с вычетной прямой $gL = \pi L$. Следовательно, согласно 5.5.2, $\Phi_g = \Lambda$, т. е.

$$\Lambda k = gkg^{-1}, \quad k \in \Delta,$$

что и требовалось доказать.

2) Теперь рассмотрим вопрос о единственности. Если имеются две проективные коллинеации g и j пространства V на V_1, такие, что

$$gkg^{-1} = \Lambda k = jkj^{-1}, \quad k \in \Delta,$$

то для любой прямой $L \in \mathscr{L}$ имеем

$$g\tau_L g^{-1} = j\tau_L j^{-1},$$

где $\tau_L \in \Delta$ — произвольная нетривиальная проективная транс векция с вычетной прямой L. Поэтому, согласно § 4.4, $gL = jL$. Но g и j, будучи проективностями, ввиду 1.1.2 полностью определяются своими значениями на прямых, откуда $g = j$. Единственность h получается теперь из единственности g для изоморфизма $\check{\Delta} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1$. Наконец, равенство

$$gkg^{-1} = h\check{k}h^{-1} \quad \text{для всех} \quad k \in \Delta$$

невозможно. В самом деле, рассмотрим проективные трансвекции τ_1, τ_2 из Δ с одинаковыми вычетными прямыми, но различными неподвижными гиперплоскостями. Тогда этим же свойством обладают $g\tau_1 g^{-1}$ и $g\tau_2 g^{-1}$, в то время как $h\check{\tau}_1 h^{-1}$ и $h\check{\tau}_2 h^{-1}$ не обладают им.

5.5.13A. Теорема. *Изоморфные проективные группы коллинеаций, богатые проективными трансвекциями, имеют одинаковые размерности, за исключением, возможно, случая, когда одна из групп есть* $\boldsymbol{PSL}_3$ *над* $\mathbb{F}_2$, *а другая* $\boldsymbol{PSL}_2$ *над* $\mathbb{F}_7$.

5.5.13B. Теорема. *Изоморфные проективные группы коллинеаций, богатые проективными трансвекциями и имеющие общую размерность* $\geqslant 3$, *имеют изоморфные основные поля.*

5.5.13C. Теорема. *При* $n \geqslant 3$ *изоморфизмы между подгруппами, богатыми трансвекциями, группы* $\boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$ *индуцируются ее автоморфизмами.*

5.5.13.D. Теорема. *При* $n \geqslant 3$ *имеем*

$$|\operatorname{Aut} \boldsymbol{P\Gamma L}_n(V) : \operatorname{Int} \boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)| = 2.$$

Здесь $\mathrm{Aut}\, X$ обозначает группу автоморфизмов произвольной группы X, а $\mathrm{Int}\, X$ обозначает нормальную подгруппу группы $\mathrm{Aut}\, X$, состоящую из всех внутренних автоморфизмов группы X.

5.5.14. Теорема. *Пусть G, G_1 — подгруппы из $\mathbf{\Gamma L}_n(V)$, $\mathbf{\Gamma L}_{n_1}(V_1)$ соответственно, богатые трансвекциями. Пусть $n \geqslant 3$, $n_1 \geqslant 3$. Тогда всякий изоморфизм Ψ: $G \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow G_1$ имеет точно одну из двух форм: либо*

$$\Psi k = \chi(k)\, gkg^{-1}, \qquad k \in G,$$

где χ — отображение группы G в $\boldsymbol{RL}_{n_1}(V_1)$, а g — коллинеация пространства V на V_1, либо

$$\Psi k = \chi(k)\, h\check{k}h^{-1}, \qquad k \in G,$$

где χ — отображение группы G в $\boldsymbol{RL}_{n_1}(V_1)$, а h — коллинеация пространства V' на V_1.

Доказательство. Очевидно, группы $\overline{G}$ и $\overline{G}_1$ богаты проективными трансвекциями. Если положить

$$\overline{\Psi}\bar{k} = \overline{\Psi k} \quad \text{для} \quad \bar{k} \in \overline{G},$$

то, ввиду 5.5.6, $\overline{\Psi}$ — корректно определенный изоморфизм группы $\overline{G}$ на $\overline{G}_1$. По теореме 5.5.13 $\overline{\Psi}$ имеет точно одну из двух форм: либо

$$\overline{\Psi}\bar{k} = \bar{g}\bar{k}\bar{g}^{-1}, \qquad k \in G,$$

для некоторой проективной коллинеации $\bar{g}$ пространства V на V_1, либо

$$\overline{\Psi}\bar{k} = \bar{h}\check{\bar{k}}\bar{h}^{-1}, \qquad k \in G,$$

для некоторой проективной коллинеации $\bar{h}$ пространства V' на V_1. В первом случае имеем коллинеацию g пространства V на V_1, такую, что элементы Ψk и gkg^{-1} группы $\mathbf{\Gamma L}_{n_1}(V_1)$ удовлетворяют условию

$$\overline{\Psi k} = \overline{gkg^{-1}}, \qquad k \in G.$$

Стало быть, в ядре $\boldsymbol{RL}_{n_1}(V_1)$ существует элемент $\chi(k)$, зависящий от k и такой, что

$$\Psi k = \chi(k)\, gkg^{-1}, \qquad k \in G.$$

Аналогично в случае h. Применяя $^{-}$ и используя теорему 5.5.13, находим, что Ψ не может одновременно иметь g-вид и h-вид.

5.5.14А. Теорема. *Изоморфные группы коллинеаций, богатые трансвекциями, имеют одинаковые размерности, если обе эти размерности* $\geqslant 2$.

5.5.14В. Теорема. *Изоморфные группы коллинеаций, богатые трансвекциями, имеют изоморфные основные поля, если их (общая) размерность* $\geqslant 3$.

5.5.15. Замечание. Если группы G и G_1 из теоремы 5.5.14 являются группами линейных преобразований, т. е. содержатся в $\boldsymbol{GL}_n(V)$ и $\boldsymbol{GL}_{n_1}(V_1)$ соответственно, то χ — групповой гомоморфизм, однозначно определенный изоморфизмом Ψ, а коллинеация g (соответственно h) определена однозначно с точностью до растяжения пространства V_1.

5.5.16. Замечание. Если группы G и G_1 из теоремы 5.5.14 не только линейны, но и удовлетворяют условию $DG = G$ и $DG_1 = G_1$ (например, если $G = \boldsymbol{SL}_n(V)$ и $G_1 = \boldsymbol{SL}_{n_1}(V_1)$), то функция χ тривиальна, т. е.

$$\Psi k = gkg^{-1}, \qquad k \in G,$$

или

$$\Psi k = h\check{k}h^{-1}, \qquad k \in G.$$

§ 5.6. Теоремы об изоморфизмах над полями

При $n \geqslant 3$, $n_1 \geqslant 3$ изоморфизмы больших групп

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{\Gamma L}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{\Gamma L}_{n_1}(V_1), & \boldsymbol{P\Gamma L}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{P\Gamma L}_{n_1}(V_1), \\ \boldsymbol{GL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{GL}_{n_1}(V_1), & \boldsymbol{PGL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{PGL}_{n_1}(V_1), \\ \boldsymbol{SL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{SL}_{n_1}(V_1), & \boldsymbol{PSL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{PSL}_{n_1}(V_1) \end{array}$$

полностью описаны в 5.5.13—5.5.16, так как все эти группы богаты трансвекциями. Мы знаем также из 5.5.7 и 5.5.8, что ни один из указанных изоморфизмов не возможен при $n = 2$, $n_1 \geqslant 3$, за исключением, быть может, изоморфизма между $\boldsymbol{PSL}_2(V)$ над $\mathbb{F}_7$ и $\boldsymbol{PSL}_3(V_1)$ над $\mathbb{F}_2$, т. е. изоморфизма $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7) \simeq \boldsymbol{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$.

Таким образом, если говорить о больших группах $\boldsymbol{\Gamma L}_n(V)$ и т. д. и оставить в стороне случай $n = 1$, то остался нерассмотренным только случай, когда $n = n_1 = 2$. Цель настоящего параграфа — исследовать этот оставшийся случай и, в

частности, установить исключительные изоморфизмы

$$\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7) \simeq \boldsymbol{PSL}_3(\mathbb{F}_2), \qquad \boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_4).$$

Теория изоморфизмов больших групп относится по существу к теории полей, так как, например, $\boldsymbol{GL}_n(F)$ состоит из всех обратимых матриц порядка n над полем F. Заметим, что теория изомофизмов групп, богатых трансвекциями, при $n = n_1 = 2$ пока отсутствует.

5.6.1. *Предположим, что* $\boldsymbol{PSL}_2(V) \simeq \boldsymbol{PSL}_2(V_1)$, *и исключим из рассмотрения случай, когда одно из полей есть* $\mathbb{F}_4$, *а другое* $\mathbb{F}_5$. *Тогда поля* F *и* F_1 *имеют одинаковую характеристику.*

Доказательство. 1) Докажем сначала утверждение в случае, когда одна из характеристик, скажем первая, равна 2. И пусть характеристика поля F_1 отлична от 2. Сравнивая порядки групп, мы видим, что случай $F = \mathbb{F}_2$ или $F = \mathbb{F}_4$ невозможен. Поэтому будем считать, что card $F \geqslant 8$. Тогда почти дословно проходят рассуждения пункта 3) из доказательства 5.5.7, показывающие, что изоморфизм снова невозможен. Итак, в рассматриваемом случае утверждение доказано.

2) Если мощности полей F, F_1 конечны и мы хотим доказать равенство характеристик, то можно считать, в силу п. 1), что ни одна из характеристик не равна 2. Сравнивая порядки, имеем

$$\frac{1}{2} q (q^2 - 1) = \frac{1}{2} q_1 (q_1^2 - 1).$$

Ясно, что, скажем, неравенство $q < q_1$ невозможно, поэтому $q = q_1$ и, в частности, характеристики полей F, F_1 одинаковы.

3) Ввиду сказанного можно считать, что дан изоморфизм Λ: $\boldsymbol{PSL}_2(V) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{PSL}_2(V_1)$, оба поля бесконечны характеристики $\neq 2$, и нужно доказать, что характеристики одинаковы. Будем предполагать, что F имеет характеристику $p > 0$. Если обозначить через $\Delta(L)$ группу, состоящую из 1 и всех проективных трансвекций группы $\boldsymbol{PSL}_2(V)$ с вычетной прямой L, то

$\Delta(L)$ — бесконечная абелева группа,

$(\Delta(L))^p = 1$,

$(\Delta(L))^2 = \Delta(L)$.

Поэтому, если обозначить через X группу, состоящую из всех представителей элементов группы $\Lambda\Delta(L)$ в $\boldsymbol{SL}_2(V_1)$, то

X — бесконечная абелева группа,

$X^{2p} = 1_{V_1}$.

В самом деле, единственное, что нужно проверить, — это коммутативность группы X. Рассмотрим произвольные φ и ψ из X. Используя свойства группы $\Delta(L)$, легко понять, что ψ имеет вид $\psi = \pm\sigma^2$ для некоторого $\sigma \in X$ и $\varphi\sigma\varphi^{-1} = \pm\sigma$. Отсюда $\varphi\sigma^2\varphi^{-1} = \sigma^2$, $\varphi\psi\varphi^{-1} = \psi$, так что X в самом деле абелева. Предложение будет доказано, если показать, что группа $\boldsymbol{SL}_2(V_1)$ не содержит бесконечной абелевой группы X, такой, что $X^m = 1_{V_1}$, в случае, когда характеристика поля F_1 равна 0 или не делит m. При этом можно считать, что F_1 алгебраически замкнуто. Зафиксируем $\sigma \in X$, $\sigma \neq \pm 1_{V_1}$. Выбрав базу, в которой σ имеет верхнюю треугольную матрицу, и вычисляя σ^m, видим, что характеристические корни преобразования σ различны. Поэтому существует база x_1, x_2 пространства V_1, в которой

$$\sigma x_1 = \alpha x_1, \qquad \sigma x_2 = \alpha^{-1} x_2$$

и $\alpha \neq \alpha^{-1}$. Но тогда всякое $\Sigma \in X$ будет иметь матрицу вида

$$\operatorname{diag}(\zeta, \zeta^{-1}) \text{ в базе } x_1,\ x_2,$$

где ζ — корень m-й степени из 1 в поле F_1. Получается, что X конечна, противоречие.

5.6.2. *Предположим, что F имеет характеристику 0. Пусть σ — нетривиальный элемент из $\boldsymbol{SL}_2(V)$. Тогда σ является трансвекцией в том и только том случае, когда σ — элемент бесконечного порядка, сопряженный с σ^4 в $\boldsymbol{SL}_2(V)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что σ является трансвекцией. Тогда σ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в некоторой базе пространства V. Очевидно, порядок элемента σ бесконечен и

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4,$$

т. е. σ сопряжен с σ^4 в $\boldsymbol{SL}_2(V)$.

Теперь докажем обратное. Будем работать с матрицами. Нам дан элемент A бесконечного порядка из группы $\boldsymbol{SL}_2(F)$, причем A и A^4 сопряжены в $\boldsymbol{SL}_2(F)$. Нужно доказать, что 1 является характеристическим корнем матрицы A. Можно считать, что поле F алгебраически замкнуто. Пусть, напротив, A имеет различные характеристические корни. Тогда существует такая матрица $X \in \boldsymbol{GL}_2(F)$, что

$$XAX^{-1} = \operatorname{diag}(\alpha, \alpha^{-1}).$$

Так как A имеет бесконечный порядок, то $\alpha \neq \alpha^4$ и $\alpha \neq \alpha^{-4}$. Но это невозможно, так как A и A^4, будучи сопряжены в $\boldsymbol{SL}_2(F)$, должны иметь одинаковые характеристические корни. Значит, $\varepsilon = \pm 1$ — единственный характеристический корень матрицы A. Так как A и A^4 сопряжены, то $\varepsilon = 1$.

5.6.3. *Пусть* Λ — *изоморфизм группы* $\boldsymbol{PSL}_2(V)$ *на группу* $\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$. *Исключим из рассмотрения случай, когда одно из полей есть* $\mathbb{F}_4$, *а другое* $\mathbb{F}_5$. *Тогда* Λ *сохраняет проективные трансвекции.*

Доказательство. Ввиду 5.6.1 характеристики полей F и F_1 одинаковы. Пусть $\bar{\sigma}$ — произвольная нетривиальная проективная трансвекция из $\boldsymbol{PSL}_2(V)$ с представителем σ в $\boldsymbol{SL}_2(V)$. Достаточно доказать, что $\Lambda\bar{\sigma}$ — проективная трансвекция из $\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$. Пусть σ_1 — представитель элемента $\Lambda\bar{\sigma}$ в $\boldsymbol{SL}_2(V_1)$.

Если характеристика равна $p > 0$, то $\bar{\sigma}^p = 1$, $\bar{\sigma}_1^p = 1$, откуда $\sigma_1^p = 1_{V_1}$ или $(-\sigma_1)^p = 1_{V_1}$ и, значит, согласно 5.1.3, одно из преобразований σ_1, $-\sigma_1$ унипотентно. Так как размерность равна 2, то σ_1 или $-\sigma_1$ — трансвекция. Поэтому $\Lambda\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1$ — проективная трансвекция, что и требовалось доказать.

Пусть теперь характеристика равна 0. Запишем $\bar{\sigma} = \bar{\tau}^2$, где τ — трансвекция из $\boldsymbol{SL}_2(V)$. Тогда τ имеет бесконечный порядок и сопряжена с τ^4 в $\boldsymbol{SL}_2(V)$. Следовательно, $\bar{\tau}_1$ имеет бесконечный порядок и сопряжена с $\bar{\tau}_1^4$ в $\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$, где τ_1 — представитель элемента $\Lambda\bar{\tau}$ в $\boldsymbol{SL}_2(V_1)$. Отсюда получаем, что τ_1 — элемент бесконечного порядка, сопряженный с τ_1^4 или $-\tau_1^4$ в $\boldsymbol{SL}_2(V_1)$. Значит, τ_1^2 имеет бесконечный порядок и сопряжен с $(\tau_1^2)^4$ в $\boldsymbol{SL}_2(V_1)$. Согласно 5.6.2, τ_1^2 — трансвекция. Но $\Lambda\bar{\sigma} = \Lambda\bar{\tau}^2 = \bar{\tau}_1^2$. Значит, $\Lambda\bar{\sigma}$ — проективная трансвекция, что и требовалось доказать.

5.6.4. *Пусть* μ — *аддитивный изоморфизм* F *на* F_1 *и* $1^\mu = 1$ *и* $(\alpha^{-1})^\mu = (\alpha^\mu)^{-1}$ *для всех* $\alpha \in \dot{F}$. *Тогда* μ — *изоморфизм полей.*

Доказательство. Прямым вычислением получаем

$$\alpha\beta\alpha = \alpha - \left(\alpha^{-1} + \quad {}^{-1} - \alpha)^{-1}\right)^{-1}$$

для всех $\alpha, \beta \in \dot{F}$, $\alpha \neq \beta^{-1}$. Следовательно, для всех таких α, β и, значит, вообще для всех $\alpha, \beta \in F$ имеем

$$(\alpha\beta\alpha)^\mu = \alpha^\mu\beta^\mu\alpha^\mu.$$

В частности,

$$(\alpha^2)^\mu = (\alpha^\mu)^2 \quad \text{для всех} \quad \alpha \in F.$$

Если характеристика не равна 2 (оба поля, разумеется, имеют одну и ту же характеристику), то

$$\alpha\beta + \alpha\beta = \{(\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2\},$$

откуда

$$(\alpha\beta)^\mu + (\alpha\beta)^\mu = \alpha^\mu\beta^\mu + \alpha^\mu\beta^\mu$$

и, значит, $(\alpha\beta)^\mu = \alpha^\mu\beta^\mu$. Если же характеристика равна 2, то

$$\begin{aligned}\left((\alpha\beta)^\mu\right)^2 &= \left((\alpha\beta)^2\right)^\mu = \\ &= (\alpha\beta^2\alpha)^\mu = \\ &= \alpha^\mu (\beta^2)^\mu \alpha^\mu = \\ &= (\alpha^\mu)^2 (\beta^\mu)^2 = \\ &= (\alpha^\mu\beta^\mu)^2,\end{aligned}$$

т. е. снова $(\alpha\beta)^\mu = \alpha^\mu\beta^\mu$, что и требовалось доказать.

5.6.5. Теорема. *Пусть Δ и Δ_1 — группы,*

$$\boldsymbol{PSL}_2(V) \subseteq \Delta \subseteq \boldsymbol{PGL}_2(V), \qquad \boldsymbol{PSL}_2(V_1) \subseteq \Delta_1 \subseteq \boldsymbol{PGL}_2(V_1).$$

Исключим из рассмотрения ситуацию, когда одна из групп Δ, Δ_1 есть $\boldsymbol{PSL}_2$ над $\mathbb{F}_4$, а другая $\boldsymbol{PSL}_2$ над $\mathbb{F}_5$. Тогда всякий изоморфизм Λ: $\Delta \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1$ имеет вид

$$\Lambda k = gkg^{-1}, \qquad k \in \Delta,$$

для единственной проективной коллинеации g пространства V на V_1.

Доказательство. 1) Единственность g получается так же, как в п. 2) доказательства теоремы 5.5.13.

2) Покажем, что из справедливости теоремы для $\Delta = \boldsymbol{PSL}_2(V)$ и $\Delta_1 = \boldsymbol{PSL}_2(V_1)$ следует ее справедливость для любых Δ и Δ_1 при данных условиях. Заметим сначала, пользуясь таблицей

F	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_3$		$\mathbb{F}_4$	$\mathbb{F}_5$		card $F \geqslant 7$
Δ	$\boldsymbol{PSL}_2$	$\boldsymbol{PSL}_2$	$\boldsymbol{PGL}_2$	$\boldsymbol{PSL}_2$	$\boldsymbol{PSL}_2$	$\boldsymbol{PGL}_2$	$\boldsymbol{PSL}_2 \subseteq \Delta \subseteq \boldsymbol{PGL}_2$
Card Δ	6	12	24	60	60	120	$\geqslant 168$

(см. § 3.1), что Λ индуцирует при сужении на группу $\boldsymbol{PSL}_2(V)$ ее изоморфизм на $\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$. В самом деле, если $\operatorname{card} F \geqslant 4$, то по таблице $\operatorname{card} F_1 \geqslant 4$, затем применяем D к Δ и Δ_1 и используем 3.3.4. Если $\operatorname{card} F = 3$, $\Delta = \boldsymbol{PGL}_2$, то рассуждаем аналогично. Если $\operatorname{card} F = 3$, $\Delta = \boldsymbol{PSL}_2$, то утверждение очевидно; если $\operatorname{card} F = 2$ — тоже. Заметим теперь, снова используя таблицу, что сужение изоморфизма Λ не приводит к ситуации, когда одна из групп есть $\boldsymbol{PSL}_2$ над $\mathbb{F}_4$, а другая $\boldsymbol{PSL}_2$ над $\mathbb{F}_5$. Поэтому, предполагая теорему доказанной для $\boldsymbol{PSL}_2$, мы найдем такую проективную коллинеацию g пространства V на V_1, что суженный изоморфизм Λ: $\boldsymbol{PSL}_2(V) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{PSL}_2(V_1)$ имеет вид

$$\Lambda k = gkg^{-1}, \qquad k \in \boldsymbol{PSL}_2(V).$$

Пусть Φ_g обозначает сужение изоморфизма Φ_g из § 4.4 на группу Δ, т. е.

$$\Phi_g\colon \Delta \rightarrowtail \boldsymbol{PSL}_2(V_1).$$

Таким образом, $\Phi_g k = gkg^{-1}$ для всех $k \in \Delta$. Мы знаем, что Φ_g и Λ совпадают на $\boldsymbol{PSL}_2$, и хотим показать, что они совпадают на Δ. Для произвольного $\tau \in \boldsymbol{PSL}_2(V)$ имеем

$$\begin{aligned}(\Phi_g k)(\Phi_g \tau)(\Phi_g k)^{-1} &= \Phi_g\left(k\tau k^{-1}\right) = \\ &= \Lambda\left(k\tau k^{-1}\right) = \\ &= (\Lambda k)(\Lambda\tau)(\Lambda k)^{-1} = \\ &= (\Lambda k)(\Phi_g \tau)(\Lambda k)^{-1}.\end{aligned}$$

Но $\Phi_g\tau$ — произвольный элемент из $\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$. Следовательно, согласно 4.3.5, $\Phi_g k = \Lambda k$, что и требовалось доказать.

3) Таким образом, мы должны рассмотреть изоморфизм Λ группы $\boldsymbol{PSL}_2(V)$ на $\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$ и найти для него проективную коллинеацию g пространства V на V_1, такую, что $\Lambda k = gkg^{-1}$ для всех $k \in \boldsymbol{PSL}_2(V)$. Напомним, что ситуация, когда одно из полей есть $\mathbb{F}_4$, а другое $\mathbb{F}_5$, исключается из рассмотрения. Пусть $\Delta(L)$ — группа, состоящая из 1 и всех проективных трансвекций группы $\boldsymbol{PSL}_2(V)$ с вычетной прямой L. Аналогично определим $\Delta_1(L')$ для прямой L' из V_1. Тогда, ввиду 1.6.3, $\Delta(L)$ — максимальная группа проективных трансвекций из $\boldsymbol{PSL}_2(V)$. В силу 5.6.3 $\Lambda\Delta(L)$ — максимальная группа проективных трансвекций в $\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$. Поэтому, снова ввиду 1.6.3, существует прямая L' в V_1, такая, что $\Lambda\Delta(L) = \Delta_1(L')$. Тем самым изоморфизм Λ индуцирует биекцию $L \longleftrightarrow L'$ множества $\mathscr{L}$ прямых пространства V на множество $\mathscr{L}'$ прямых

пространства V_1 в силу соотношения

$$\Lambda\Delta(L) = \Delta_1(L').$$

Зафиксируем три различные прямые L_1, L_2, L_3 в пространстве V. Пусть L_1', L_2', L_3' — их образы относительно указанной биекции. Очевидно, можно выбрать векторы x_i, x_i' так, чтобы было

$$L_1 = \langle x_1 \rangle, \quad L_2 = \langle x_2 \rangle, \quad L_3 = \langle x_1 + x_2 \rangle,$$
$$L_1' = \langle x_1' \rangle, \quad L_2' = \langle x_2' \rangle, \quad L_3' = \langle x_1' + x_2' \rangle,$$

где $\langle a \rangle$ обозначает, как обычно, прямую, порожденную ненулевым вектором a. Это позволяет определить отображение $\alpha \mapsto \alpha'$ поля F в F_1 следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} \langle x_1 + \alpha x_2 \rangle = L & \mapsto & L' = \langle x_1' + \alpha' x_2' \rangle \\ \uparrow & & \downarrow \\ \alpha & & \alpha' \end{array}$$

Очевидно, оно биективно и $0' = 0$, $1' = 1$. Определяющее соотношение для биекции $\alpha \mapsto \alpha'$ есть

$$\Lambda\Delta(\langle x_1 + \alpha x_2 \rangle) = \Delta_1(\langle x_1' + \alpha' x_2' \rangle).$$

3a) Докажем, что $(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta'$ для всех α, $\beta \in F$. Для данного $\beta \in F$ определим $\sigma \in \boldsymbol{SL}_2(V)$ так:

$$\sigma x_1 = x_1 + \beta x_2,$$
$$\sigma x_2 = \quad\quad x_2.$$

Тогда $\bar\sigma \in \Delta(L_2)$, откуда $\Lambda\bar\sigma \in \Delta_1(L_2')$, и, значит, $\Lambda\bar\sigma = \bar\sigma_1$ для некоторого преобразования $\sigma_1 \in \boldsymbol{SL}_2(V_1)$ вида

$$\sigma_1 x_1' = x_1' + \beta^* x_2',$$
$$\sigma_1 x_2' = \quad\quad x_2',$$

где $\beta^* \in F_1$. Прямой подстановкой находим

$$\bar\sigma\Delta(\langle x_1 + \alpha x_2 \rangle)\bar\sigma^{-1} = \Delta(\langle x_1 + (\alpha + \beta) x_2 \rangle).$$

Аналогично,

$$\bar\sigma_1\Delta_1(\langle x_1' + \alpha' x_2' \rangle)\bar\sigma_1^{-1} = \Delta_1(\langle x_1' + (\alpha' + \beta^*) x_2' \rangle).$$

Далее,

$$\Delta_1(\langle x_1' + (\alpha + \beta)' x_2' \rangle) = \Lambda\Delta(\langle x_1 + (\alpha + \beta) x_2 \rangle) =$$
$$= \Lambda(\bar\sigma\Delta(\langle x_1 + \alpha x_2 \rangle)\bar\sigma^{-1}) = \bar\sigma_1\Delta_1(\langle x_1' + \alpha' x_2' \rangle)\bar\sigma_1^{-1} =$$
$$= \Delta_1(\langle x_1' + (\alpha' + \beta^*) x_2' \rangle),$$

откуда $(\alpha+\beta)'=\alpha'+\beta^*$ для всех $\alpha\in F$. Полагая $\alpha=0$, получаем $\beta^*=\beta'$. Значит, $(\alpha+\beta)'=\alpha'+\beta'$.

3b) Докажем теперь, что соотношение $(1/\alpha)'=1/\alpha'$ также выполняется для всех ненулевых $\alpha\in F$. На этот раз определим $\sigma\in \boldsymbol{SL}_2(V)$ так:

$$\sigma x_1 = \qquad -x_2,$$
$$\sigma x_2 = x_1+2x_2.$$

Тогда $\bar\sigma\in\Delta(\langle x_1+x_2\rangle)=\Delta(L_3)$, поэтому $\Lambda\bar\sigma\in\Delta_1(L_3')=\Delta_1(\langle x_1'+x_2'\rangle)$. Значит, $\Lambda\bar\sigma$ имеет представитель $\sigma_1\in\boldsymbol{SL}_2(V_1)$, являющийся трансвекцией с вычетной прямой $\langle x_1'+x_2'\rangle$. В частности,

$$\sigma_1(x_1'+x_2')=x_1'+x_2'.$$

С другой стороны,

$$\bar\sigma\Delta(L_1)\bar\sigma^{-1}=\Delta(L_2),$$

поэтому

$$\bar\sigma_1\Delta_1(L_1')\bar\sigma_1^{-1}=\Delta_1(L_2'),$$

откуда $\sigma_1x_1'=*\,x_2'$. Таким образом, σ_1 имеет вид

$$\sigma_1x_1' = \qquad *\,x_2',$$
$$\sigma_1x_2' = x_1'+*\,x_2',$$

откуда следует, что

$$\sigma_1x_1' = \qquad -x_2',$$
$$\sigma_1x_2' = x_1'+2x_2'.$$

Далее,

$$\Delta_1(\langle x_1'+(2-1/\alpha)'x_2'\rangle)=\Lambda\Delta(\langle x_1+(2-1/\alpha)x_2\rangle)=$$
$$=\Lambda(\bar\sigma\Delta(\langle x_1+\alpha x_2\rangle)\bar\sigma^{-1})=\bar\sigma_1\Delta_1(\langle x_1'+\alpha'x_2'\rangle)\bar\sigma_1^{-1}=$$
$$=\Delta_1(\langle x_1'+(2-1/\alpha')x_2'\rangle).$$

Используя пункт 3a), получаем $(1/\alpha)'=1/\alpha'$, что и требовалось.

3c) Таким образом, ввиду 5.6.4, биекция $\alpha\mapsto\alpha'$ на самом деле есть изоморфизм поля F на поле F_1. Согласно 4.1.2, отображение

$$g(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha'x_1'+\beta'x_2'$$

определяет проективную коллинеацию $\bar g$ пространства V на V_1, обладающую свойством

$$\bar gL=L' \quad \text{для всех} \quad L\in\mathscr{L}.$$

Пусть $\Phi_{\bar g}$ — сужение на $\boldsymbol{PSL}_2$ изоморфизма $\Phi_{\bar g}$ из § 4.4. Имеем

$$\Phi_{\bar g}\colon \boldsymbol{PSL}_2(V) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{PSL}_2(V_1)$$

и

$$\Phi_{\bar g}\Delta(L) = \Delta_1(L') = \Lambda\Delta(L)$$

для всех прямых L пространства V. Рассуждая, как в доказательстве предложения 5.5.12, мы видим, что если Φ — изоморфизм $\boldsymbol{PSL}_2(V)$ на $\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$, удовлетворяющий условию

$$\Phi\Delta(L) = \Delta_1(L'), \qquad L \in \mathscr{L},$$

то $(\Phi k)L' = (kL)'$ для всех $k \in \boldsymbol{PSL}_2(V)$, $L \in \mathscr{L}$. В частности,

$$(\Phi_{\bar g}k)L' = (\Lambda k)L'$$

для всех указанных k и L. Поэтому $\Phi_{\bar g}k = \Lambda k$, т. е. $\Lambda k = \bar g k \bar g^{-1}$ для всех $k \in \boldsymbol{PSL}_2(V)$.

5.6.6. Теорема. *Пусть G и G_1 — группы,*

$$\boldsymbol{SL}_2(V) \subseteq G \subseteq \boldsymbol{GL}_2(V), \qquad \boldsymbol{SL}_2(V_1) \subseteq G_1 \subseteq \boldsymbol{GL}_2(V_1).$$

Тогда всякий изоморфизм $\Psi\colon G \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow G_1$ имеет вид

$$\Psi k = \chi(k)\, g k g^{-1}, \qquad k \in G,$$

где χ — отображение из G в $\boldsymbol{RL}_2(V_1)$, а g — коллинеация пространства V на V_1.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.5.14.

5.6.7. Замечание. Отображение χ является на самом деле групповым гомоморфизмом. Оно однозначно определено изоморфизмом Ψ. Отображение g единственно с точностью до умножения на растяжение пространства V_1. Кроме того, χ тривиально, если $G = \boldsymbol{SL}_2(V)$ и $G_1 = \boldsymbol{SL}_2(V_1)$. Все эти утверждения доказываются непосредственно, за исключением, быть может, тривиальности χ в случае $F = \mathbb{F}_3$. Но тогда $F_1 = \mathbb{F}_3$, поэтому $\chi(\sigma) = \pm 1_{V_1}$. Стало быть, χ тривиально на квадратах, а потому и на трансвекциях и, значит, тривиально в целом.

5.6.8. $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_4)$ *и* $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ — *изоморфные группы порядка* 60.

Доказательство. Пусть $n = 2$, $F = \mathbb{F}_4$, $n_1 = 2$, $F_1 = \mathbb{F}_5$. Покажем, что обе рассматриваемые группы изоморфны знакопеременной группе $\mathfrak{A}_5$.

1) Сначала $\boldsymbol{PSL}_2(V)$. Так как $F=\mathbb{F}_4$, то V содержит пять прямых, т. е. $\mathrm{card}\, P^1(V)=5$. Далее, всякое $k\in \boldsymbol{PSL}_2(V)$ есть биекция пространства $P(V)$ на себя, отображающая $P^1(V)$ на $P^1(V)$. Таким образом, возникает гомоморфизм группы $\boldsymbol{PSL}_2(V)$ в симметрическую группу на множестве $P^1(V)$ и, значит, в симметрическую группу $\mathfrak{S}_5$. Очевидно, его ядро тривиально, поэтому $\boldsymbol{PSL}_2(V)$ изоморфна подгруппе из $\mathfrak{S}_5$ порядка 60. Легко видеть, что простая группа $\mathfrak{A}_5$ — единственная подгруппа индекса 2 в $\mathfrak{S}_5$. Поэтому $\boldsymbol{PSL}_2(V)\simeq\mathfrak{A}_5$, что и утверждалось.

2) Теперь $\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$. Рассмотрим $P^1(V_1)$ — множество прямых из V_1, понимаемых как точки проективного пространства $P(V_1)$. Очевидно, $\mathrm{card}\, P^1(V_1)=6$. Если даны различные точки P, Q, R, S из $P^1(V_1)$, то будем говорить, что пара P, Q *гармонически связана* с парой R, S, если в пространстве V_1 существуют такие векторы p, q, что

$$P=F_1p,\qquad Q=F_1q,$$
$$S=F_1(p-q),\quad R=F_1(p+q).$$

Легко проверить, что пара P, Q гармонически связана с парой R, S тогда и только тогда, когда существует преобразование $\sigma\in \boldsymbol{PSL}_2(V_1)$, переставляющее P с Q, а R с S.

Разбиением множества $P^1(V_1)$ называется, как обычно, разложение $P^1(V_1)$ на непересекающиеся подмножества. *Гармоническим разбиением* назовем разбиение $P^1(V_1)$ на три двухточечных подмножества, любые два из которых гармонически связаны. Из определений немедленно следует, что для данных трех различных точек P, Q, L существует единственная четвертая точка K, отличная от первых трех и такая, что пара P, Q гармонически связана с парой L, K. Поэтому, если два гармонических разбиения имеют общее подмножество (элемент разбиения), то они совпадают. В частности, существует самое большее пять гармонических разбиений. С другой стороны, фиксируя точку P и заставляя Q пробегать остальные точки, получим по крайней мере пять разбиений. Таким образом, существует точно пять гармонических разбиений, скажем $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_3$, $\mathscr{H}_4$, $\mathscr{H}_5$. Рассмотрим произвольный элемент $\sigma\in \boldsymbol{PSL}_2(V_1)$. Для каждого гармонического разбиения

$$\mathscr{H}=\{L_1,\ L_2\,|\,L_3,\ L_4\,|\,L_5,\ L_6\}$$

разбиение

$$\{\sigma L_1,\ \sigma L_2\,|\,\sigma L_3,\ \sigma L_4\,|\,\sigma L_5,\ \sigma L_6\}$$

снова гармоническое, обозначим его через $\tilde{\sigma}\mathscr{H}$. Легко видеть, что $\tilde{\sigma}\mathscr{H}_i=\tilde{\sigma}\mathscr{H}_j$ тогда и только тогда, когда $i=j$, поэтому

$\tilde{\sigma}$ — подстановка на множестве из пяти гармонических разбиений. Очевидно, $\widetilde{\sigma\tau} = \tilde{\sigma}\tilde{\tau}$, поэтому $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ есть гомоморфизм группы $\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$ в симметрическую группу на пяти объектах $\{\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_5\}$ (где расположены эти объекты?). Очевидно, $\tilde{\sigma}\mathscr{H} \neq \mathscr{H}$ для всякой проективной трансвекции σ, поэтому в силу простоты группы $\boldsymbol{PSL}_2(V_1)$ ядро отображения $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ тривиально. Другими словами, имеем изоморфизм группы $\boldsymbol{PSL}_2(V)$ порядка 60 в симметрическую группу $\mathfrak{S}_5$, т. е. на подгруппу индекса 2 в $\mathfrak{S}_5$. Но $\mathfrak{A}_5$ — единственная такая подгруппа. Поэтому $\boldsymbol{PSL}_2(V_1) \simeq \mathfrak{A}_5$, что и утверждалось.

5.6.9. $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ *и* $\boldsymbol{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$ — *изоморфные группы порядка* 168.

Доказательство. 1a) По определению $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ есть образ группы $\boldsymbol{SL}_2(\mathbb{F}_7)$ при естественном гомоморфизме

$$P\colon\ \boldsymbol{GL}_2(\mathbb{F}_7) \twoheadrightarrow \boldsymbol{GL}_2(\mathbb{F}_7)/\boldsymbol{RL}_2(\mathbb{F}_7).$$

Имеем

$$\ker\left(P\,|_{\boldsymbol{SL}_2(\mathbb{F}_7)}\right) = (\pm I).$$

Если p, q, r, s — элементы из $\mathbb{F}_7$, удовлетворяющие условию $ps - qr = 1$, то $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ обозначает, как обычно, матрицу порядка 2 из $\boldsymbol{SL}_2(\mathbb{F}_7)$. Для удобства мы будем так же обозначать и элементы из $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$. Строго говоря, это означает, что рассматривается естественный образ элемента $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ в $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$, два таких элемента $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ r_1 & s_1 \end{pmatrix}$ из $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ равны тогда и только тогда, когда

$$p = \varepsilon p_1, \quad q = \varepsilon q_1, \quad r = \varepsilon r_1, \quad s = \varepsilon s_1, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

1b) Изучая в группе $\boldsymbol{SL}_2$ уравнение

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^2 = \pm 1, \quad \text{где} \quad ps - qr = 1,$$

легко понять, что различные нетривиальные инволюции из $\boldsymbol{PSL}_2$ — это элементы

$$\begin{pmatrix} p & q \\ \dfrac{-(1+p^2)}{q} & -p \end{pmatrix}, \qquad p = 0, \ldots, 6; \quad q = 1, 2, 3.$$

В частности, $\boldsymbol{PSL}_2$ содержит точно 21 нетривиальную инволюцию.

1с) Заметим далее, что все нетривиальные инволюции из $\boldsymbol{PSL}_2$ сопряжены в $\boldsymbol{PSL}_2$, точнее, все они сопряжены с $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. В самом деле, из соотношения

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -r^{-1} \\ r & 0 \end{pmatrix},$$

где $r = -(1 + p^2)/q$ и $\lambda = -p/r$ (заметим, что $r \neq 0$, так как $1 + p^2 \neq 0$ в $\mathbb{F}_7$), следует сопряженность инволюции $\begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix}$ с $\begin{pmatrix} 0 & -r^{-1} \\ r & 0 \end{pmatrix}$ в $\boldsymbol{PSL}_2$, Для доказательства сопряженности с $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ выберем такие элементы $a, b \in \mathbb{F}_7$, что $a^2 + b^2 = -r^{-1}$ (это всегда возможно — рассмотрите множество квадратов $\dot{\mathbb{F}}_7^2$). Положим

$$c = \frac{-b}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{bc + 1}{a}$$

и заметим, что в группе $\boldsymbol{SL}_2$, а потому и в $\boldsymbol{PSL}_2$ выполняется соотношение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -r^{-1} \\ r & 0 \end{pmatrix}.$$

1d) Теперь легко проверить, используя пункт 1b), что существует точно пять нетривиальных инволюций, перестановочных с инволюцией $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ в $\boldsymbol{PSL}_2$, а именно она сама и еще

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Из этих четырех элементов можно составить точно две пары элементов, перестановочных в $\boldsymbol{PSL}_2$: одна состоит из первого и четвертого, другая—из второго и третьего элементов. Отсюда следует, что существует точно три группы инволюций в $\boldsymbol{PSL}_2$,

содержащих элемент $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а именно подгруппы

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$L_0 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right\},$$

$$H_0 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\right\}$$

группы $\boldsymbol{PSL}_2$ (использовать то, что группа, целиком состоящая из инволюций, абелева). Поэтому инволюция $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ из $\boldsymbol{PSL}_2$ принадлежит точно двум максимальным группам инволюций в $\boldsymbol{PSL}_2$, а именно группам L_0 и H_0.

1e) Из пунктов 1c) и 1d) немедленно следует, что каждая нетривиальная инволюция из $\boldsymbol{PSL}_2$ принадлежит точно двум различным максимальным группам инволюций в $\boldsymbol{PSL}_2$. Эти группы имеют порядок 4, а их пересечение — порядок 2. В частности, всякая максимальная группа инволюций из $\boldsymbol{PSL}_2$ имеет порядок 4. Будем говорить, что две максимальные группы инволюций в $\boldsymbol{PSL}_2$ *инцидентны*, если их пересечение неединично. Пусть $\mathscr{X}$ обозначает множество максимальных групп инволюций в $\boldsymbol{PSL}_2$.

1f) Определим максимальные группы инволюций

$$L_0, \ldots, L_6, \quad H_0, \ldots, H_6$$

равенствами

$$L_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L_0 \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$H_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H_0 \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

для $t = 0, \ldots, 6$. Все индексы берутся из $\mathbb{F}_7$. Очевидно,

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L_i \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = L_{i+t},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H_i \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = H_{i+t}$$

для всех $i, t \in \mathbb{F}_7$. Легко проверить, что

$$L_i \cap L_j = H_i \cap H_j = 1 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$
$$L_i \neq L \quad \text{для всех } i, j$$

(достаточно рассмотреть случай $i=0$, который проверяется прямым вычислением). Отсюда следует, что

$$L_0 \cup \ldots \cup L_6$$

— множество, состоящее из 21 инволюции и 1. Но в силу пункта 1b) в группе $\boldsymbol{PSL}_2$ точно 21 нетривиальная инволюция, поэтому всякая нетривиальная инволюция лежит точно в одном из множеств $L_0, \ldots, L_6$. Так же обстоит дело с $H_0, \ldots, H_6$. С другой стороны, всякая нетривиальная инволюция лежит точно в двух максимальных группах инволюций из $\boldsymbol{PSL}_2$, ввиду 1e). Следовательно, список

$$L_0, \ldots, L_6, \quad H_0, \ldots, H_6$$

содержит любую максимальную группу инволюций из $\boldsymbol{PSL}_2$ точно один раз. В частности, $\operatorname{card}\mathscr{X}=14$ и

$$\mathscr{X}=\{L_0, \ldots, L_6, H_0, \ldots, H_6\}.$$

Очевидно, каждая L_i инцидентна точно с тремя из подгрупп H_j, но ни с одной из L_j, $j \neq i$. И наоборот, каждая H_j инцидентна точно с тремя из подгрупп L_i, но ни с одной из H_i, $i \neq j$. Когда L_i инцидентна с H_j? Прямым вычислением получаем, что H_0, H_1, H_3 — в точности те H_j, которые инцидентны с L_0. Переходя к сопряженным подгруппам, видим, что

$$L_i \text{ инцидентна с } H_j \Leftrightarrow j=i,\ i+1 \text{ или } i+3$$

(напомним, что сложение индексов происходит в $\mathbb{F}_7$).

2) Рассмотрим теперь группу $\boldsymbol{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$. На сей раз мы будем говорить о преобразованиях, а не о матрицах. Рассмотрим группу $\boldsymbol{PSL}_3(V_1)$ с $F_1=\mathbb{F}_2$. Зафиксируем базу x_0, x_1, x_2 пространства V_1. Пусть ρ_0, ρ_1, ρ_2 — сопряженная с ней база. Через $\langle a\rangle$ будем обозначать прямую $F_1 a$. Тогда список

$$\begin{aligned}
&l_0=\langle x_0\rangle, && h_0=\langle \rho_1+\rho_2\rangle^0,\\
&l_1=\langle x_1\rangle, && h_1=\langle \rho_2\rangle^0,\\
&l_2=\langle x_2\rangle, && h_2=\langle \rho_0\rangle^0,\\
&l_3=\langle x_0+x_2\rangle, && h_3=\langle \rho_1\rangle^0,\\
&l_4=\langle x_0+x_1+x_2\rangle, && h_4=\langle \rho_0+\rho_2\rangle^0,\\
&l_5=\langle x_0+x_1\rangle, && h_5=\langle \rho_0+\rho_1\rangle^0,\\
&l_6=\langle x_1+x_2\rangle, && h_6=\langle \rho_0+\rho_1+\rho_2\rangle^0
\end{aligned}$$

включает все прямые l_i и все гиперплоскости h_j пространства V_1 (i, j пробегают $\mathbb{F}_7$). Очевидно,

$$l \subseteq h \Leftrightarrow j=i,\ i+1 \text{ или } i+3$$

для всех $i, j \in \mathbb{F}_7$. Пусть $\mathfrak{x}$ обозначает множество всех 14 прямых и гиперплоскостей из V_1, т. е.

$$\mathfrak{x} = \{l_0, \ldots, l_6, h_0, \ldots, h_6\}.$$

Будем говорить, что два элемента из $\mathfrak{x}$ *инцидентны*, если один из них содержится в другом (имеется в виду обычное теоретико-множественное включение подмножеств из V_1).

3) Определим отождествляющую биекцию $f: \mathscr{X} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{x}$, полагая

$$f(L_i) = l_i, \quad f(H_i) = h_i \qquad (i = 0, \ldots, 6).$$

Ввиду 1f) и 2), биекция f сохраняет инцидентность. Для данного $S \in \boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ положим

$$\tilde{S}(x) = f\left(S\left(f^{-1}x\right)S^{-1}\right), \qquad x \in \mathfrak{x}.$$

Легко проверить, что $\tilde{S}$ — сохраняющая инцидентность подстановка на множестве $\mathfrak{x}$ и $\widetilde{S_1 S_2} = \tilde{S}_1 \tilde{S}_2$ для всех $S_1, S_2 \in \boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$. Другими словами, имеем гомоморфизм $S \longmapsto \tilde{S}$ группы $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ в группу Z сохраняющих инцидентность подстановок на множестве $\mathfrak{x}$. В силу простоты групп $\boldsymbol{PSL}$ ядро либо тривиально, либо совпадает со всей группой $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$. Второе невозможно, так как, например, элемент $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ из $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ дает $\tilde{S}(l_0) = l_1$, т. е. $\tilde{S}$ — нетривиальная подстановка. Следовательно, группа $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ изоморфна подгруппе группы Z. Теперь легко видеть, что сохраняющая инцидентность подстановка на множестве $\mathfrak{x}$ либо сохраняет все включения, либо все их обращает (использовать рассуждения из доказательства 5.5.10). Отсюда тривиально следует, что группа Z изоморфна группе Y, состоящей из таких подстановок на множестве $P(V)$, которые либо сохраняют все включения, либо обращают их. Поэтому $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ изоморфна подгруппе порядка 168 группы Y. Но группа проективностей $\boldsymbol{P\Xi L}_3(V_1)$ является нормальной подгруппой индекса 2 в Y. Кроме того,

$$\boldsymbol{P\Xi L}_3 = \boldsymbol{P\Gamma L}_3 = \boldsymbol{PGL}_3 = \boldsymbol{PSL}_3,$$

так как $F_1 = \mathbb{F}_2$. Поэтому $\boldsymbol{P\Xi L}_3$ имеет 168 элементов, а Y имеет 336. Следовательно, Y содержит две нормальные подгруппы индекса 2, а именно $\boldsymbol{PSL}_3(V_1)$ и группу, изоморфную $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$. Ввиду простоты эти подгруппы должны совпадать, откуда $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7) \simeq \boldsymbol{PSL}_3(V_1) \simeq \boldsymbol{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$, что и требовалось доказать.

5.6.10. Теорема. *Пусть* n, n_1 — *натуральные числа* $\geqslant 2$, F, F_1 — *произвольные поля. Тогда следующие утверждения равносильны*:

0) $n = n_1$, $F \simeq F_1$,

1) $\boldsymbol{SL}_n(F) \simeq \boldsymbol{SL}_{n_1}(F_1)$,

2) $\boldsymbol{GL}_n(F) \simeq \boldsymbol{GL}_{n_1}(F_1)$,

3) $\boldsymbol{PGL}_n(F) \simeq \boldsymbol{PGL}_{n_1}(F_1)$.

Если отбросить исключительные изоморфизмы

$$\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_5), \quad \boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7) \simeq \boldsymbol{PSL}_3(\mathbb{F}_2),$$

то указанные утверждения равносильны еще такому:

4) $\boldsymbol{PSL}_n(F) \simeq \boldsymbol{PSL}_{n_1}(F_1)$.

5.6.11. Замечания. 1) Мы показали, что $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_4)$ и $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ — изоморфные группы порядка 60. Мы знаем также, что они просты. На самом деле можно показать, что все простые группы порядка 60 изоморфны. Аналогично, все простые группы порядка 168 изоморфны группам $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ и $\boldsymbol{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$.

2) При доказательстве изоморфизма между группами $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_4)$ и $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ было показано, что обе они изоморфны группе $\mathfrak{A}_5$. Перечислим все исключительные изоморфизмы такого рода:

$$\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3, \quad \boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7) \simeq \boldsymbol{PSL}_3(\mathbb{F}_2),$$
$$\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4, \quad \boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_9) \simeq \mathfrak{A}_6,$$
$$\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5 \simeq \boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_5), \quad \boldsymbol{PSL}_4(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{A}_8.$$

Имеется несколько исключительных изоморфизмов и для других классических групп.

3) По поводу доказательств этих замечаний см. ссылки на литературу в § 5.8.

§ 5.7. Теоремы об изоморфизмах над областями целостности

Рассмотрим теперь произвольную коммутативную область целостности $\mathfrak{o}$ с полем частных F. Аналогично, пусть $\mathfrak{o}_1$ — область целостности с полем частных F_1.

Под (*дробным*) *идеалом* относительно области $\mathfrak{o}$ мы подразумеваем непустое подмножество $\mathfrak{a}$ поля F, являющееся $\mathfrak{o}$-модулем и удовлетворяющее условию $\lambda\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$ для некоторого

ненулевого $\lambda \in \mathfrak{o}$. Здесь $\lambda\mathfrak{a}$ обозначает $\mathfrak{o}$-модуль

$$\lambda\mathfrak{a} = \{\lambda x \mid x \in \mathfrak{a}\}.$$

Очевидно, что $\alpha\mathfrak{o}$ — дробный идеал при любом $\alpha \in \dot{F}$. Всякий дробный идеал, который можно записать в виде $\alpha\mathfrak{o}$ для некоторого $\alpha \in \dot{F}$, будем называть *главным* идеалом. Если $\mathfrak{a}$ — дробный идеал, то и $\alpha\mathfrak{a}$ — дробный идеал для любого $\alpha \in \dot{F}$. Каждый конечно порожденный ненулевой $\mathfrak{o}$-модуль, содержащийся в F, является дробным идеалом. Легко видеть, что для любых двух дробных идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ существует такой ненулевой элемент $\lambda \in \mathfrak{o}$, что $\lambda\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$. Если $\mathfrak{o}=F$, то F—единственный дробный идеал относительно $\mathfrak{o}$.

Целым идеалом называется дробный идеал, содержащийся в $\mathfrak{o}$. Таким образом, целые идеалы — это обычные идеалы кольца $\mathfrak{o}$, за исключением нулевого идеала. Всякий целый идеал удовлетворяет условию $0 \subset \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$. Для любых двух дробных идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ определим

$$\text{н. о. д.: } \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in \mathfrak{a},\ \beta \in \mathfrak{b}\},$$

$$\text{н. о. к.: } \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b},$$

$$\text{произведение: } \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{\sum_{\text{конечная}} \alpha\beta \mid \alpha \in \mathfrak{a},\ \beta \in \mathfrak{b}\}.$$

Легко проверить, что $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ — снова дробные идеалы. Следующие тождества очевидны:

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}, \quad (\alpha\mathfrak{a})(\beta\mathfrak{b}) = (\alpha\beta)(\mathfrak{a}\mathfrak{b}),$$

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{o} = \mathfrak{a}.$$

Под $\mathfrak{o}$-модулем M в векторном пространстве V мы подразумеваем подмножество M в V, являющееся $\mathfrak{o}$-модулем. Мы говорим, что $\mathfrak{o}$-модуль M является модулем *на* V, если он порождает V над F. Легко видеть, что если M — модуль в V, то он является модулем на V тогда и только тогда, когда он содержит базу пространства V.

Рассмотрим $\mathfrak{o}$-модуль M в V. Положим

$$FM = \{\alpha x \mid \alpha \in F,\ x \in M\}.$$

Очевидно,

$$FM = \{\alpha^{-1}x \mid \alpha \in \mathfrak{o},\ \alpha \neq 0,\ x \in M\},$$

так как F — поле частных для $\mathfrak{o}$. Следовательно, FM — подпространство пространства V, точнее, подпространство, порожденное модулем M. Таким образом, M есть модуль на V тогда и только тогда, когда $FM = V$.

Для любых $\alpha \in F$, дробного идеала $\mathfrak{a}$ и модуля M в V определим

$$\alpha M = \{\alpha x \mid x \in M\},$$

$$\mathfrak{a}M = \{ \sum_{\text{конечная}} \beta x \mid \beta \in \mathfrak{a},\ x \in M\}.$$

Как αM, так и $\mathfrak{a}M$ — снова модули в V, а на самом деле в FM. Легко проверить, что выполняются следующие тождества:

$$\alpha(M \cap N) = (\alpha M) \cap (\alpha N), \quad \alpha(M + N) = \alpha M + \alpha N,$$

$$\alpha(\mathfrak{a}M) = (\alpha\mathfrak{a})M = \mathfrak{a}(\alpha M),$$

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})M = \mathfrak{a}M + \mathfrak{b}M, \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{b})M = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}M),$$

$$\mathfrak{a}(M + N) = \mathfrak{a}M + \mathfrak{a}N,$$

$$F(M + N) = FM + FN.$$

Подмножество векторов из V независимо над $\mathfrak{o}$ тогда и только тогда, когда оно независимо над F. В частности, $\mathfrak{o}$-модуль M на V свободен тогда и только тогда, когда существует такая база $x_1, \ldots, x_n$ пространства V, что $M = \mathfrak{o}x_1 + \ldots + \mathfrak{o}x_n$.

Будем говорить, что $\mathfrak{o}$-модуль M на V *ограничен*, если он содержится в свободном $\mathfrak{o}$-модуле на V. Таким образом, свободные $\mathfrak{o}$-модули на V ограничены. Кроме того, всякий ограниченный модуль на V содержит некоторый свободный модуль на V и содержится в некотором свободном модуле на V. Подмодуль ограниченного модуля ограничен, если он является модулем на V.

5.7.1. *Пусть M и N суть $\mathfrak{o}$-модули на V, причем N свободен. Модуль M ограничен тогда и только тогда, когда $\alpha M \subseteq N$ для некоторого ненулевого $\alpha \in \mathfrak{o}$.*

Доказательство. Если $\alpha M \subseteq N$, то M содержится в свободном модуле $\alpha^{-1}N$, поэтому M ограничен. Обратно, предположим, что M ограничен. Тогда $M \subseteq P$, где модуль P свободен на V. Возьмем базы, в которых

$$N = \mathfrak{o}x_1 + \ldots + \mathfrak{o}x_n, \quad P = \mathfrak{o}y_1 + \ldots + \mathfrak{o}y_n,$$

и запишем

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i, \qquad a_{ij} \in F.$$

Пусть α — произведение всех знаменателей элементов a_{ij}. Тогда α — ненулевой элемент из $\mathfrak{o}$ и $\alpha a_{ij} \in \mathfrak{o}$ для всех i, j.

Имеем

$$\alpha M \subseteq \alpha P \subseteq N.$$

5.7.2. *Пусть M и N — два $\mathfrak{o}$-модуля на V, причем N ограничен. Модуль M ограничен тогда и только тогда, когда $\alpha M \subseteq N$ для некоторого ненулевого $\alpha \in \mathfrak{o}$.*

Из приведенных результатов следует, что если M и N — ограниченные $\mathfrak{o}$-модули на V, то

$$\alpha M, \quad \mathfrak{a} M, \quad M \cap N, \quad M + N$$

также ограниченные $\mathfrak{o}$-модули на V.

Для любого ограниченного $\mathfrak{o}$-модуля M на V и любого ненулевого $x \in V$ определим коэффициент $\mathfrak{c}_x$ вектора x относительно M как множество

$$\mathfrak{c}_x = \{\alpha \in F \mid \alpha x \in M\}.$$

Очевидно, $\mathfrak{c}_x = M \cap Fx$. Используя 5.7.1, видим, что $\mathfrak{c}_x$ — дробный идеал.

Рассмотрим ограниченный $\mathfrak{o}$-модуль M на V. Определим линейные группы (над областью целостности $\mathfrak{o}$)

$$\boldsymbol{GL}_n(M) = \{\sigma \in \boldsymbol{GL}_n(V) \mid \sigma M = M\},$$
$$\boldsymbol{SL}_n(M) = \boldsymbol{GL}_n(M) \cap \boldsymbol{SL}_n(V).$$

Будем говорить, что линейное преобразование σ *сохраняет* M, если $\sigma \in \boldsymbol{GL}_n(M)$, т. е. $\sigma M = M$. Для всякого ненулевого целого идеала $\mathfrak{a}$ определим линейные конгруэнц-группы

$$\boldsymbol{GL}_n(M, \mathfrak{a}) = \{\sigma \in \boldsymbol{GL}_n(M) \mid (\sigma - 1_V) M \subseteq \mathfrak{a} M\},$$
$$\boldsymbol{SL}_n(M, \mathfrak{a}) = \boldsymbol{GL}_n(M, \mathfrak{a}) \cap \boldsymbol{SL}_n(V).$$

Очевидно, $\boldsymbol{SL}_n(M, \mathfrak{a})$, $\boldsymbol{GL}_n(M, \mathfrak{a})$ — нормальные подгруппы в $\boldsymbol{GL}_n(M)$. Имеем

$$\boldsymbol{GL}_n(M, \mathfrak{o}) = \boldsymbol{GL}_n(M), \quad \boldsymbol{SL}_n(M, \mathfrak{o}) = \boldsymbol{SL}_n(M).$$

Проективные линейные группы $\boldsymbol{PGL}_n(M)$, $\boldsymbol{PSL}_n(M)$ и проективные линейные конгруэнц-группы $\boldsymbol{PGL}_n(M, \mathfrak{a})$, $\boldsymbol{PSL}_n(M, \mathfrak{a})$ определяются как образы относительно гомоморфизма P.

Если взять произвольную нетривиальную трансвекцию τ и записать ее в виде $\tau_{a, \rho}$, то получим

$$\tau M = M \Leftrightarrow \tau M \subseteq M \Leftrightarrow (\rho M) a \subseteq M$$

и

$$\tau \in \boldsymbol{SL}_n(M, \mathfrak{a}) \Leftrightarrow (\rho M) a \subseteq \mathfrak{a} M.$$

5.7.3. *Если M — ограниченный $\mathfrak{o}$-модуль на V, $\mathfrak{a}$ — ненулевой целый идеал и $n \geqslant 2$, то группа $\boldsymbol{SL}_n(M, \mathfrak{a})$ богата трансвекциями.*

Доказательство. Для данных $a \in V$, $\rho \in V'$, таких, что $\rho a = 0$, мы должны найти такой элемент $\lambda \in \dot{F}$, что $\tau_{\lambda a, \rho}$ лежит в $\boldsymbol{SL}_n(M, \mathfrak{a})$. Легко проверить, что ρM — дробный идеал. Поэтому существует такой ненулевой элемент $\lambda \in \mathfrak{o}$, что $\lambda(\rho M) \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{c}_a$, где $\mathfrak{c}_a$ — коэффициент вектора a. Тогда

$$(\rho M)(\lambda a) \subseteq (\lambda(\rho M)) a \subseteq (\mathfrak{a}\mathfrak{c}_a) a \subseteq \mathfrak{a}M.$$

Таким образом, $\tau_{\lambda a, \rho} \in \boldsymbol{SL}_n(M, \mathfrak{a})$, что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что $\boldsymbol{SL}_n(M, \mathfrak{a})$, $\boldsymbol{GL}_n(M, \mathfrak{a})$ и вообще любая подгруппа из $\boldsymbol{\Gamma L}_n(V)$, содержащая линейную конгруэнц-группу $\boldsymbol{SL}_n(M, \mathfrak{a})$, богата трансвекциями. Аналогично, любая подгруппа из $\boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$, содержащая проективную линейную конгруэнц-группу $\boldsymbol{PSL}_n(M, \mathfrak{a})$, богата проективными трансвекциями. Значит, к таким группам применимы все теоремы 5.5.13 — 5.5.16 об изоморфизмах. В частности, получаем следующие результаты.

5.7.4. Теорема. *Пусть $\mathfrak{o}$ — область целостности с полем частных F, M — ограниченный $\mathfrak{o}$-модуль на V, $\mathfrak{a}$ — ненулевой целый идеал и Δ — группа, удовлетворяющая условию*

$$\boldsymbol{PSL}_n(M, \mathfrak{a}) \subseteq \Delta \subseteq \boldsymbol{P\Gamma L}_n(V),$$

$n \geqslant 3$. *Пусть $\mathfrak{o}_1$, F_1, M_1, V_1, $\mathfrak{a}_1$, Δ_1, n_1 — второй набор объектов с аналогичными условиями. Всякий изоморфизм $\Lambda\colon \Delta \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1$ имеет точно одну из двух форм: либо*

$$\Lambda k = gkg^{-1}, \quad k \in \Delta,$$

для некоторой единственной проективной коллинеации g пространства V на V_1, либо

$$\Lambda k = h\check{k}h^{-1}, \quad k \in \Delta,$$

для некоторой единственной проективной коллинеации h пространства V' на V_1. Кроме того, $n = n_1$, $F \simeq F_1$.

5.7.5. Теорема. *Пусть $\mathfrak{o}$ — область целостности с полем частных F, M — ограниченный $\mathfrak{o}$-модуль на V, $\mathfrak{a}$ — ненулевой целый идеал, G — такая группа, что*

$$\boldsymbol{SL}_n(M, \mathfrak{a}) \subseteq G \subseteq \boldsymbol{\Gamma L}_n(V),$$

$n \geqslant 3$. *Пусть* $\mathfrak{o}_1$, F_1, M_1, V_1, $\mathfrak{a}_1$, G_1, n_1 — *второй набор объектов с аналогичными условиями. Всякий изоморфизм* Ψ: $G \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow G_1$ *имеет точно одну из двух форм: либо*

$$\Psi k = \chi(k)\, gkg^{-1}, \quad k \in G,$$

где χ — *отображение из* G *в* $\boldsymbol{RL}_{n_1}(V_1)$, g — *коллинеация пространства* V *на* V_1, *либо*

$$\Psi k = \chi(k)\, h\check{k}h^{-1}, \quad k \in G,$$

где χ — *отображение группы* G *в* $\boldsymbol{RL}_{n_1}(V_1)$, h — *коллинеация пространства* V' *на* V_1. *Кроме того,* $n = n_1$, $F \simeq F_1$.

Матрица порядка n над полем F называется *целой* (относительно данной области целостности $\mathfrak{o}$), если ее коэффициенты лежат в $\mathfrak{o}$, и *унимодулярной*, если она целая и ее определитель обратим в $\mathfrak{o}$. Легко видеть, что целая матрица A унимодулярна тогда и только тогда, когда она обратима и матрица A^{-1} целая. Пусть $\boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o})$ обозначает подгруппу всех унимодулярных матриц из $\boldsymbol{GL}_n(F)$ и

$$\boldsymbol{SL}_n(\mathfrak{o}) = \boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o}) \cap \boldsymbol{SL}_n(F).$$

Группы $\boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o})$ и $\boldsymbol{SL}_n(\mathfrak{o})$ называются *матричными группами* над областью целостности $\mathfrak{o}$. Для всякого ненулевого целого идеала $\mathfrak{a}$ определим матричные конгруэнц-группы

$$\boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) = \{X \in \boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o}) \mid X \equiv I \bmod \mathfrak{a}\},$$
$$\boldsymbol{SL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) = \boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) \cap \boldsymbol{SL}_n(F),$$

где сравнимость по модулю $\mathfrak{a}$ двух матриц порядка n означает их поэлементную сравнимость по модулю $\mathfrak{a}$. Очевидно, что $\boldsymbol{SL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ и $\boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ — нормальные подгруппы в $\boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o})$. Имеем

$$\boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}) = \boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o}), \quad \boldsymbol{SL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}) = \boldsymbol{SL}_n(\mathfrak{o}).$$

Проективные матричные группы $\boldsymbol{PGL}_n(\mathfrak{o})$, $\boldsymbol{PSL}_n(\mathfrak{o})$ и проективные матричные конгруэнц-группы $\boldsymbol{PGL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$, $\boldsymbol{PSL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ определяются как образы относительно гомоморфизма P.

Предположим теперь, что M — свободный модуль на V, скажем,

$$M = \mathfrak{o}x_1 + \ldots + \mathfrak{o}x_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — база пространства V. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — сопряженная база. Если линейное преобразование $\sigma \in \boldsymbol{GL}_n(V)$ имеет в этой базе матрицу S, то легко видеть, что

$$\sigma M \subseteq M \Leftrightarrow S \text{ целая}$$

и

$$\sigma M = M \Leftrightarrow S \text{ унимодулярная.}$$

В частности, элементарная трансвекция $\tau_{\lambda x_i, \rho_j}$ сохраняет M тогда и только тогда, когда $\lambda \in \mathfrak{o}$, т. е.

$$\tau_{\lambda x_i, \rho_j} \in \boldsymbol{SL}_n(M) \Leftrightarrow \lambda \in \mathfrak{o}.$$

Так как унимодулярная матрица имеет обратимый определитель, то легко видеть, что в свободном случае группа $\boldsymbol{GL}_n(M)/\boldsymbol{SL}_n(M)$ изоморфна группе единиц кольца $\mathfrak{o}$. Ясно, что матричный изоморфизм, отвечающий выбору базы $x_1, \ldots, x_n$ (для M и V), индуцирует изоморфизмы

$$\boldsymbol{GL}_n(M) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o}), \quad \boldsymbol{GL}_n(M, \mathfrak{a}) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}),$$
$$\boldsymbol{SL}_n(M) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{SL}_n(\mathfrak{o}), \quad \boldsymbol{SL}_n(M, \mathfrak{a}) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{SL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}).$$

Мы уже знаем, что он индуцирует также изоморфизм групп

$$\boldsymbol{RL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{RL}_n(F),$$

поэтому

$$\boldsymbol{PGL}_n(M) \simeq \boldsymbol{PGL}_n(\mathfrak{o}), \quad \boldsymbol{PGL}_n(M, \mathfrak{a}) \simeq \boldsymbol{PGL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}),$$
$$\boldsymbol{PSL}_n(M) \simeq \boldsymbol{PSL}_n(\mathfrak{o}), \quad \boldsymbol{PSL}_n(M, \mathfrak{a}) \simeq \boldsymbol{PSL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}).$$

Следующая теорема об изоморфизмах для матричных конгруэнц-групп получается переводом теоремы 5.7.5 на матричный язык. (*Вопрос*: в какой мере справедлива единственность?)

5.7.6. Теорема. *Пусть $\mathfrak{o}$ — область целостности с полем частных F, $\mathfrak{a}$ — ненулевой целый идеал, G — группа, удовлетворяющая условию*

$$\boldsymbol{SL}_n(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) \subseteq G \subseteq \boldsymbol{GL}_n(F),$$

и $n \geqslant 3$. Пусть, далее, $\mathfrak{o}_1$, F_1, $\mathfrak{a}_1$, G_1, n_1 — другой набор объектов с аналогичными свойствами и Ψ: $G \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow G_1$ — изоморфизм. Тогда $n = n_1$ и

$$\Psi X = \chi(X) A X^{\mu} A^{-1}, \quad X \in G,$$

или

$$\Psi X = \chi(X) A \check{X}^{\mu} A^{-1}, \quad X \in G,$$

где μ: $F \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow F_1$ — изоморфизм полей, A — некоторая матрица из $\boldsymbol{GL}_{n_1}(F_1)$, χ — некоторый гомоморфизм группы G в $\boldsymbol{RL}_{n_1}(F_1)$.

Определим модуль $M^{\#}$ для свободного модуля M на V, полагая

$$M^{\#} = \{\rho \in V' \mid \rho M \subseteq \mathfrak{o}\}.$$

Тогда

$$M^{\#}=\mathfrak{o}\rho_1+\ldots+\mathfrak{o}\rho_n.$$

Контраградиентный изоморфизм $\check{}$ групп $\boldsymbol{\Gamma L}_n(V)$ и $\boldsymbol{\Gamma L}_n(V')$ индуцирует изоморфизмы

$$\check{}:\ \boldsymbol{GL}_n(M)\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{GL}_n(M^{\#}),$$
$$\check{}:\ \boldsymbol{SL}_n(M)\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{SL}_n(M^{\#}),$$

а контраградиентный изоморфизм $\check{}$ групп $\boldsymbol{P\Gamma L}_n(V)$ и $\boldsymbol{P\Gamma L}_n(V')$ индуцирует изоморфизмы

$$\check{}:\ \boldsymbol{PGL}_n(M)\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{PGL}_n(M^{\#}),$$
$$\check{}:\ \boldsymbol{PSL}_n(M)\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{PSL}_n(M^{\#}).$$

5.7.7. Теорема. *Пусть n, n_1 — натуральные числа $\geqslant 3$, а $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}_1$ — произвольные области целостности. Следующие утверждения равносильны:*

0) $n=n_1,\ \mathfrak{o}\simeq\mathfrak{o}_1$,
1) $\boldsymbol{SL}_n(\mathfrak{o})\simeq\boldsymbol{SL}_{n_1}(\mathfrak{o}_1)$,
2) $\boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o})\simeq\boldsymbol{GL}_{n_1}(\mathfrak{o}_1)$,
3) $\boldsymbol{PGL}_n(\mathfrak{o})\simeq\boldsymbol{PGL}_{n_1}(\mathfrak{o}_1)$,
4) $\boldsymbol{PSL}_n(\mathfrak{o})\simeq\boldsymbol{PSL}_{n_1}(\mathfrak{o}_1)$.

Доказательство. Из определений следуют импликации $0)\Rightarrow 1)$, $0)\Rightarrow 2)$. Далее, в силу 5.7.3, группа $\boldsymbol{SL}_n(M)$ богата трансвекциями, поэтому, в силу 5.2.7, группа $\boldsymbol{SL}_n(M)\cap\boldsymbol{RL}_n(V)$ является центром группы $\boldsymbol{SL}_n(M)$. Значит, $\boldsymbol{PSL}_n(\mathfrak{o})\simeq\boldsymbol{SL}_n(\mathfrak{o})/\mathrm{cen}\,\boldsymbol{SL}_n(\mathfrak{o})$ и $1)\Rightarrow 4)$. Аналогично, $2)\Rightarrow 3)$. Осталось доказать импликации $4)\Rightarrow 0)$, $3)\Rightarrow 0)$. Другими словами, для свободного модуля M на V мы должны показать, что

$$\boldsymbol{PSL}_n(M)\simeq\boldsymbol{PSL}_{n_1}(M_1)\Rightarrow\mathfrak{o}\simeq\mathfrak{o}_1$$

и

$$\boldsymbol{PGL}_n(M)\simeq\boldsymbol{PGL}_{n_1}(M_1)\Rightarrow\mathfrak{o}\simeq\mathfrak{o}_1.$$

Заменяя, если необходимо, модуль M на V модулем $M^{\#}$ на V' и применяя теорему 5.7.4, можно считать, что данный изоморфизм $\boldsymbol{PSL}_n(M)\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow\boldsymbol{PSL}_{n_1}(M_1)$ или $\boldsymbol{PGL}_n(M)\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow\boldsymbol{PGL}_{n_1}(M_1)$ есть $\Phi_{\bar g}$ для некоторой коллинеации g пространства V на V_1. Тогда достаточно показать, что если существует коллинеация

g пространства V на V_1 со свойством $\Phi_{\bar{g}}\Delta = \Delta_1$, где либо

$$\Delta = \boldsymbol{PSL}_n(M), \quad \Delta_1 = \boldsymbol{PSL}_{n_1}(M_1),$$

либо

$$\Delta = \boldsymbol{PGL}_n(M), \quad \Delta_1 = \boldsymbol{PGL}_{n_1}(M_1),$$

то

$$\mathfrak{o}^{\mu} = \mathfrak{o}_1,$$

где μ — изоморфизм полей, ассоциированный с g. Возьмем базу $x_1, \ldots, x_n$ пространства V, в которой

$$M = \mathfrak{o}x_1 + \ldots + \mathfrak{o}x_n,$$

и пусть $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — сопряженная база. Положим $y_i = gx_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varphi_j = \mu\rho_j g^{-1}$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда $y_1, \ldots, y_n$ — база пространства V_1 (в частности, $n = n_1$) и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — сопряженная с ней база. Трансвекция τ_{x_i, ρ_j} сохраняет M, поэтому $\bar{\tau}_{x_i, \rho_j}$ лежит в Δ, откуда $\Phi_{\bar{g}}\bar{\tau}_{x_i, \rho_j} \in \Delta_1$, т. е. $\bar{\tau}_{y_i, \varphi_j} \in \Delta_1$, и, значит, $\bar{\tau}_{y_i, \varphi_j}$ имеет представитель $\alpha\tau_{y_i, \varphi_j}$ $(\alpha \in \dot{F}_1)$, сохраняющий M_1. Но коммутаторное соотношение

$$\tau_{y_i, \varphi_j} = [\beta\tau_{y_i, \varphi_k}, \gamma\tau_{y_k, \varphi_j}]$$

показывает, что τ_{y_i, φ_j} сохраняет M_1. Следовательно, $\varphi_j(M_1)\, y_i \subseteq M_1$, откуда $\varphi_j(M_1)\lambda y_i \subseteq M_1$ для всех $\lambda \in \mathfrak{o}_1$. Значит, $\tau_{\lambda y_i, \varphi_j}$ сохраняет M_1 для всех $\lambda \in \mathfrak{o}_1$. Далее, для всех $\lambda \in \mathfrak{o}_1$ имеем

$$\bar{\tau}_{\lambda y_i, \varphi_j} \in \Delta_1,$$

поэтому

$$\bar{g}^{-1}\bar{\tau}_{\lambda y_i, \varphi_j}\bar{g} \in \Delta,$$

т. е. $\xi\tau_{\eta x_i, \rho_j}$ сохраняет M для некоторого $\xi \in \dot{F}$, где

$$\tau_{\eta x_i, \rho_j} = g^{-1}\tau_{\lambda y_i, \varphi_j} g \quad \text{и} \quad \eta = \lambda^{\mu^{-1}}.$$

Следовательно,

$$\tau_{\eta x_i, \rho_k} = [\xi\tau_{\eta x_i, \rho_j}, \tau_{x_j, \rho_k}]$$

сохраняет M, откуда $\eta \in \mathfrak{o}$. Таким образом, $\mathfrak{o}_1^{\mu^{-1}} \subseteq \mathfrak{o}$, откуда $\mathfrak{o}_1 \subseteq \mathfrak{o}^{\mu}$. Точно так же из рассмотрения изоморфизма $\Phi_{\bar{g}}^{-1}$ группы Δ_1 на Δ получим $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}_1^{\mu^{-1}}$. Следовательно, $\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{o}^{\mu}$, что и требовалось доказать.

§ 5.8. Комментарии

Теория изоморфизмов классических групп была начата работой Шрайера и ван дер Вардена [31], в которой были описаны автоморфизмы группы $\boldsymbol{PSL}_n$ над произвольным полем. Затем Дьёдонне [11] и Риккарт [30] ввели метод инволюций, использованный в дальнейшем ими и многими другими авторами для описания изоморфизмов между большими классическими группами. Для конечных полей другие доказательства неизоморфности, основанные на сравнении порядков групп, дал Артин [1, 2]. Автоморфизмы и изоморфизмы групп Шевалле и тесно связанных с ними групп над различными полями были найдены в работах [34, 35, 20, 17]. Теорию изоморфизмов (даже гомоморфизмов) для широкого класса групп, включающего большие линейные группы над бесконечными полями, а также большие классические группы в изотропном случае над бесконечными полями, недавно развили Борель и Титс [7]. Первый шаг в построении теории автоморфизмов над кольцами, а именно над кольцом целых чисел, сделали Хуа Ло-ген и Райнер [19], затем были рассмотрены гауссовы целые числа и области главных идеалов. Автоморфизмы линейных групп над произвольными областями целостности при $n \geqslant 3$ описал О'Мира [24]. Автоморфизмы некоторых групп целых точек некоторых расщепляемых групп над полями алгебраических чисел исследовал Борель [5], при этом автоморфизмы линейных групп над арифметическими областями числовых полей получаются как частный случай. Метод, изложенный в последней главе данных лекций, впервые был введен в одной моей работе 1968 г. об ортогональных группах. Вскоре он был применен в работе [25] к линейным группам, богатым трансвекциями, и, в частности, к линейным группам над областями целостности при $n \geqslant 3$. Затем Солацци [33] описал при $n \geqslant 3$ автоморфизмы проективных линейных групп, богатых проективными трансвекциями, а Хан [18] — изоморфизмы таких групп, причем он дал единую трактовку для линейных, симплектических и унитарных групп в размерностях $\geqslant 5$. Идеи двух последних работ использованы в настоящей главе. Теория изоморфизмов групп коллинеаций и проективных коллинеаций, богатых трансвекциями, излагается в данных лекциях впервые, так же как и распространение теорем об изоморфизмах с размерностей $\geqslant 5$ на размерности $\geqslant 3$. (Отметим, что предложение 5.2.8, позволившее исключить в параграфе 5.4 рассмотрение ряда частных случаев, указано Уонгом.) В случае $n=2$, как показал Райнер [29], обычная теория изоморфизмов может оказаться неверной. Этот случай для специальных колец исследовали Кон [10]

и Далл [16]. Однако при $n = 2$ пока не существует никакой теории изоморфизмов линейных групп, богатых трансвекциями. Изучение автоморфизмов над кольцами с делителями нуля недавно предприняли Помфрэ и Макдональд [28]. По поводу доказательства исключительных изоморфизмов из п. 5.6.11 см. [12, 21, 22]. Дальнейшие ссылки на обширную литературу по теории изоморфизмов можно найти в книге Дьёдонне [14] и обзорных статьях Титса [37], О'Миры [26] и Ю. И. Мерзлякова [23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Artin, The orders of the linear groups, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8**, № 3 (1955), 355—365.
2. E. Artin, The orders of the classical simple groups, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8**, № 4 (1955), 455—472.
3. E. Artin, Geometric algebra, Interscience, New York, 1957. [Русский перевод: Э. Артин, Геометрическая алгебра, «Наука», М., 1969.]
4. R. Baer, Linear algebra and projective geometry, Academic Press, New York, 1952. [Русский перевод первого издания: Р. Бэр, Линейная алгебра и проективная геометрия, ИЛ, М., 1947.]
5. A. Borel, On the automorphisms of certain subgroups of semi-simple Lie groups, Proc. Conf. Alg. Geom., Bombay, 1968, 43—73.
6. A. Borel, Linear algebraic groups, Benjamin, New York, 1969.
7. A. Borel, J. Tits, Homomorphismes «abstraits» de groupes algébriques simples, *Ann. Math.*, **97**, № 3 (1973), 499—571.
8. R. W. Carter, Simple groups of Lie type, Wiley, New York, 1972.
9. C. Chevalley, Sur certain groupes simples, *Tôhoku Math. J.*, **7** (1955), 14—66.
10. P. M. Cohn, On the structure of the GL_2 of a ring, *Publs math. IHES*, № 30 (1966), 5—53. [Русский перевод: см. наст. сборник, стр. 31—56.]
11. J. Dieudonné, On the automorphisms of the classical groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, № 2 (1951), 1—95.
12. J. Dieudonné, Les isomorphismes exceptionnels entre les groupes classiques finis, *Canad. J. Math.*, **6** (1954), 305—315.
13. J. Dieudonné, Sur les générateurs des groupes classiques, *Summa Brasil. Math.*, **3** (1955), 149—179.
14. J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, Springer-Verlag, Berlin — New York, 1971. [Русский перевод: Ж. Дьёдонне, Геометрия классических групп, «Мир», М., 1974.]
15. L. E. Dickson, Linear groups, Teubner, Leipzig, 1901.
16. M. H. Dull, Automorphisms of the two-dimensional linear groups over integral domains, *Amer. J. Math.*, **96**, № 1 (1974), 1—40.
17. J. A. Gibbs, Automorphisms of certain unipotent groups, *J. Algebra*, **14**, № 2 (1970), 203—228.
18. A. J. Hahn, The isomorphisms of certain subgroups of the isometry groups of reflexive spaces, *J. Algebra*, **27**, № 2 (1973), 205—242.
19. L. K. Hua, I. Reiner, Automorphisms of the unimodular group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 331—348.
20. J. E. Humphreys, On the automorphisms of infinite Chevalley groups, *Canad. J. Math.*, **21**, № 4 (1969), 908—911.
21. B. Huppert, Endliche Gruppen, I, Springer-Verlag, Berlin — New York, 1967.

22. M. Kneser, Über die Ausnahme-Isomorphismen zwischen endlichen klassischen Gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **31** (1967), 136—140.

23. Ю. И. Мерзляков, Линейные группы, в сб. «Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1970», М., 1971, 75—110.

24. O. T. O'Meara, The automorphisms of the linear groups over any integral domain, *J. reine angew. Math.*, **223** (1966), 56—100.

25. O. T. O'Meara, Group-theoretic characterization of transvections using CDC, *Math. Z.*, **110**, № 5 (1969), 385—394.

26. O. T. O'Meara, The integral classical groups and their automorphisms, *Proc. Symp. Pure Math.*, **20** (1971), 76—85.

27. O. T. O'Meara, Introduction to quadratic forms, Springer-Verlag, New York, 1973.

28. J. Pomfret, B. R. McDonald, Automorphisms of $\boldsymbol{GL}_n(R)$, R a local ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **173** (1972), 379—388. [Русский перевод: см. наст. сборник, стр. 176—187.]

29. I. Reiner, A new type of automorphism of the general linear group over a ring, *Ann. Math.*, **66**, № 3 (1957), 461—466.

30. C. E. Rickart, Isomorphisms of infinite-dimensional analogues of the classical groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **57**, № 6 (1951), 435—448.

31. O. Schreier, B. L. van der Waerden, Die Automorphismen der projektiven Gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **6** (1928), 303—322.

32. J.-P. Serre, A course in arithmetic, Springer-Verlag, New York, 1973. [Русский перевод французского издания 1970 г.: Ж.-Р. Серр, Курс арифметики, «Мир», М., 1972.]

33. R. E. Solazzi, The automorphisms of certain subgroups of $\boldsymbol{PGL}_n(V)$, *Illinois J. Math.*, **16**, № 2 (1972), 330—348.

34. R. Steinberg, Automorphisms of finite linear groups, *Canad. J. Math.*, **12**, № 4 (1960), 606—615.

35. R. Steinberg, Lectures on Chevalley groups, Yale Lecture Notes, 1967. [Русский перевод: Р. Стейнберг, Лекции по группам Шевалле, «Мир», М., 1975.]

36. J. Tits, Algebraic and abstract simple groups, *Ann. Math.*, **80**, № 2 (1964), 313—329.

37. J. Tits, Homomorphismes et automorphismes «abstraits» de groupes algébriques et arithmétiques, Actes Congrès Int. Math. Nice, **2** (1970), 349—355. [Русский перевод: см. наст. сборник, стр. 218—225.]

38. Л. Н. Васерштейн, О группе $\boldsymbol{SL}_2$ над дедекиндовыми кольцами арифметического типа, *Матем. сб.*, **89**, № 2 (1972), 313—322.

39 M. Wonenburger, The automorphisms of the group of similitudes and some related groups, *Amer. J. Math.*, **84**, № 4 (1962), 600—614.

ЗАМЕТКА ОБ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ [1])

М. Оянгурен, Р. Сридхаран

Цель настоящей заметки — обобщение классической основной теоремы проективной геометрии на коммутативные кольца. В § 1 мы вводим понятия проективного пространства и проективности, а в § 2 доказываем основную теорему. Метод доказательства подобен методу, который в классическом случае использован, например, в книге Артина [1]. Доказательство тоже элементарно, но несколько хитрее. В § 3 приводится пример биекции между проективными пространствами, которая сохраняет коллинеарность точек, но не является проективностью. Как известно, для пространств над полем таких биекций не существует.

§ 1. Проективные пространства и проективности

Пусть A — коммутативное кольцо с единицей, M — свободный A-модуль. Пусть $P(M)$ обозначает множество всех A-свободных прямых слагаемых ранга 1 модуля M. Это множество называется *проективным пространством, ассоциированным* с M. Очевидно, всякий элемент пространства $P(M)$ имеет вид Ae, где e — унимодулярный элемент модуля M, т. е. существует линейная форма $g\colon M \to A$, такая, что $g(e) = 1$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — база A-модуля M и $e = \sum a_i e_i$, то e унимодулярен тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{n} Aa_i = A$. Если кольцо A таково, что всякий проективный модуль ранга 1 свободен, то $P(M)$ совпадает с обычным проективным пространством алгебраической геометрии ([2], стр. 13).

Определение. Пусть M и N — свободные модули над коммутативными кольцами A и B соответственно. Отображение α: $P(M) \to P(N)$ называется *проективностью*, если оно биективно и $\alpha p_1 \subset \alpha p_2 + \alpha p_3$ в N тогда и только тогда, когда $p_1 \subset p_2 + p_3$ в M для всех $p_1, p_2, p_3 \in P(M)$.

---

[1]) M. Ojanguren, R. Sridharan, A note on the fundamental theorem of projective geometry, *Comm. Math. Helv.*, 44, № 3 (1969), 310—315.

Это обобщает классическое понятие проективности между проективными пространствами над полями.

Из определения непосредственно следует, что отображение α^{-1}: $P(N) \to P(M)$ также является проективностью.

В дальнейшем нам потребуется

Лемма 1. *Если в обозначениях, введенных выше, $e_1, \ldots, e_n$ — база модуля M, e — унимодулярный элемент из M и $Ae \subset \sum_{i=1}^{k} Ae_i$, то $\alpha Ae \subset \sum_{i=1}^{k} \alpha Ae_i$.*

Доказательство проведем индукцией по k. Пусть $e = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$. Тогда вектор $e' = \sum_{i=1}^{k-1} a_i e_i + e_k$ унимодулярен и $Ae \subset Ae' + Ae_k$. Из определения следует, что $\alpha Ae \subset \alpha Ae' + \alpha Ae_k$. Пусть $e'' = \sum_{i=1}^{k-2} a_i e_i + e_k$. Так как $e' \subset Ae'' + Ae_{k-1}$, то снова имеем $\alpha Ae' \subset \alpha Ae'' + \alpha Ae_{k-1}$. Таким образом, $\alpha Ae \subset \alpha Ae'' + \alpha Ae_{k-1} + \alpha Ae_k$. По индукции

$$\alpha Ae'' \subset \sum_{i=1}^{k-2} \alpha Ae_i + \alpha Ae_k,$$

поэтому

$$\alpha Ae \subset \sum_{i=1}^{k} \alpha Ae_i.$$

Пусть A, B — кольца, σ: $A \to B$ — гомоморфизм. Если M, N — модули над A и B соответственно, то отображение Φ: $M \to N$ называется *σ-полулинейным*, если Φ аддитивно и

$$\Phi(am) = \sigma(a)\Phi(m)$$

для всех $a \in A$, $m \in M$. Если M, N — свободные модули над A и B одинакового ранга и Φ: $M \to N$ есть σ-полулинейное отображение, переводящее базу $e_1, \ldots, e_n$ модуля M в базу модуля N, то Φ переводит унимодулярный элемент $e = \sum a_i e_i$ модуля M в унимодулярный элемент $\Phi(e) = \sum \sigma(a_i)\Phi(e_i)$. В самом деле, если $\sum \lambda_i a_i = 1$, $\lambda_i \in A$, то $\sum \sigma(\lambda_i)\sigma(a_i) = 1$, откуда следует, что элемент $\Phi(e) = \sum \sigma(a_i)\Phi(e_i)$ унимодулярен. Очевидно, что мы получим индуцированное отображение $P(\Phi)$: $P(M) \to P(N)$, полагая $P(\Phi)(Ae) = B\Phi(e)$ для всякого унимодулярного элемента e модуля M. Справедливо следующее достаточно очевидное

Предложение 1. *В прежних обозначениях для* $p_1, p_2, p_3 \in P(M)$ *соотношение* $p_1 \subset p_2 + p_3$ *влечет за собой* $P(\Phi)\, p_1 \subset \subset P(\Phi)\, p_2 + P(\Phi)\, p_3$. *Если* σ — *изоморфизм, то* $P(\Phi)$ — *проективность.*

§ 2. Теорема

В данном параграфе мы докажем следующее обобщение классической основной теоремы проективной геометрии.

Теорема. *Пусть* M, N — *свободные модули конечного ранга* $\geqslant 3$ *над коммутативными кольцами* A *и* B *соответственно. Если* α: $P(M) \to P(N)$ — *проективность, то существуют изоморфизм* σ: $A \to B$ *и* σ*-полулинейный изоморфизм* Φ: $M \to N$, *такие, что* $\alpha = P(\Phi)$. *Если* σ_i: $A \to B$ — *изоморфизм и* Φ_i: $M \to N$ *есть* σ_i*-полулинейный изоморфизм,* $i=1, 2$, *причем* $P(\Phi_1)=P(\Phi_2)$, *то* $\sigma_1 = \sigma_2$ *и существует такое* $b \in B$, *что* $\Phi_1 = b\Phi_2$.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — база модуля M и $\alpha Ae_i = Bf_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Докажем, что $f_1, \ldots, f_n$ порождают B-модуль N. Так как всякий элемент модуля N является линейной комбинацией элементов его базы, то достаточно проверить, что всякий унимодулярный элемент $f \in N$ является линейной комбинацией элементов $f_1, \ldots, f_n$. Если $e \in M$ — унимодулярный элемент и $\alpha Ae = Bf$, $e = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, то $Ae \subset \sum_{i=1}^{n} Ae_i$ и, согласно лемме 1, $Bf \subset \sum_{i=1}^{n} Bf_i$.

Этим доказано, что элементы $f_1, \ldots, f_n$ порождают модуль N. Так как B — коммутативное кольцо, то ранг $N \leqslant n$. Так как α^{-1} также является проективностью, то ранг $M =$ $=$ ранг N и элементы $f_1, \ldots, f_n$ образуют базу модуля N.

Пусть $\alpha Ae_1 = Bf_1$, $\alpha Ae_2 = Bg_2$. Элемент $e_1 + e_2$ унимодулярен и $A(e_1 + e_2) \subset Ae_1 + Ae_2$, поэтому $\alpha Ae(e_1 + e_2) \subset Bf_1 + Bg_2$. Следовательно, $\alpha A(e_1 + e_2) = B(b_1 f_1 + b_2 g_2)$. Так как $Ae_2 \subset \subset Ae_1 + A(e_1 + e_2)$, то $Bg_2 \subset Bf_1 + B(b_1 f_1 + b_2 g_2)$. Таким образом, $g_2 = bf_1 + c(b_1 f_1 + b_2 g_2)$. Так как f_1 и g_2 независимы, то $cb_2 = 1$, т. е. b_2 — обратимый элемент в B. Аналогично показываем, что b_1 также обратим. Взяв $f_2 = b_1^{-1} b_2 g_2$, видим, что f_2 унимодулярен, $Bf_2 = Bg_2$ и $\alpha A(e_1 + e_2) = B(f_1 + f_2)$. Проделав эту процедуру для каждого $i > 1$, получим базу $f_1, \ldots, f_n$ модуля N, такую, что

$$\begin{aligned} &\alpha Ae_i = Bf_i, && 1 \leqslant i \leqslant n, \\ &\alpha A(e_1 + e_i) = B(f_1 + f_i), && 2 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned} \tag{1}$$

Как и раньше, ясно, что $\alpha A(e_1 + ae_2) = B(b_1 f_1 + b_2 f_2)$ для всякого $a \in A$ и b_1 обратим в B. Таким образом, можно написать

$$\alpha A(e_1 + ae_2) = B(f_1 + \sigma(a) f_2), \tag{2}$$

где σ: $A \to B$—корректно определенное отображение. Очевидно,

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(1) = 1. \tag{3}$$

Для любого фиксированного $i > 2$ аналогично можно определить τ: $A \to B$, удовлетворяющее условию

$$\alpha A(e_1 + ae_i) = B(f_1 + \tau(a) f_i), \tag{4}$$

причем

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(1) = 1. \tag{5}$$

Так как $e_1 + ae_2 + a'e_i \in A(e_1 + ae_2) + Ae_i$, то $\alpha A(e_1 + ae_2 + a'e_i) \subset B(f_1 + \sigma(a) f_2) + Bf_i$. Следовательно, $\alpha A(e_1 + ae_2 + a'e_i) = B(b(f_1 + \sigma(a) f_2) + b'f_i)$. Аналогично, $\alpha A(e_1 + ae_2 + a'e_i) = B(c(f_1 + \tau(a') f_i) + c'f_2)$. Комбинируя приведенные равенства, найдем, что

$$\alpha A(e_1 + ae_2 + a'e_i) = B(f_1 + \sigma(a) f_2 + \tau(a') f_i). \tag{6}$$

Так как $ae_2 + e_i \in A(e_1 + ae_2 + e_i) + Ae_1$, то, используя (6) и (5), получим $\alpha A(ae_2 + e_i) = B(b(f_1 + \sigma(a) f_2 + f_i) + cf_1)$. Так как $\alpha A(ae_2 + e_i) \subset Bf_2 + Bf_i$, то $b + c = 0$ и этим доказано, что

$$A(ae_2 + e_i) = B(\sigma(a) f_2 + f_i). \tag{7}$$

Теперь, используя (6) и (5), получим для a, $a' \in A$ равенство $\alpha A(e_1 + (a + a') e_2 + e_i) = B(f_1 + \sigma(a + a') f_2 + f_i)$. Но $\alpha A(e_1 + (a + a') e_2 + e_i) \subset \alpha A(e_1 + ae_2) + \alpha A(a'e_2 + e_i)$. Используя (7), получим включение

$$\alpha A(e_1 + (a + a') e_2 + e_i) \subset B(f_1 + \sigma(a) f_2) + B(\sigma(a') f_2 + f_i).$$

С учетом всего сказанного ясно, что для a, $a' \in A$ выполняется равенство

$$\sigma(a + a') = \sigma(a) + \sigma(a'). \tag{8}$$

Теперь для a, $a' \in A$ получаем, используя (6), что

$$\alpha A(e_1 + aa'e_2 + ae_i) = B(f_1 + \sigma(aa') f_2 + \tau(a) f_i).$$

С другой стороны, $\alpha A(e_1 + aa'e_2 + ae_i) \subset \alpha Ae_1 + \alpha A(a'e_2 + e_i)$, откуда следует равенство $\alpha A(e_1 + aa'e_2 + ae_i) = B(bf_1 + b'(\sigma(a') f_2 + f_i))$. Сравнивая коэффициенты, видим, что

$\sigma(aa') = \tau(a)\sigma(a')$. Полагая $a' = 1$, получим

$$\sigma(a) = \tau(a) \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad a \in A \tag{9}$$

и

$$\sigma(aa') = \sigma(a)\sigma(a') \quad \text{для} \quad a, \ a' \in A. \tag{10}$$

Итак, отображение $\sigma: A \to B$, определенное формулой (2), является гомоморфизмом. Заменив α на α^{-1}, найдем гомоморфизм $\sigma': B \to A$, удовлетворяющий равенству

$$\alpha^{-1}B(f_1 + bf_2) = A(e_1 + \sigma'(b)e_2),$$

причем σ и σ' взаимно обратны. Значит, $\sigma: A \to B$ — изоморфизм.

Покажем теперь, что для $a_2, \ldots, a_n \in A$ выполняется равенство

$$\alpha A(e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n) = \\ = B(f_1 + \sigma(a_2)f_2 + \ldots + \sigma(a_n)f_n). \tag{11}$$

По индукции можно предполагать, что

$$\alpha A(e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_{n-1}e_{n-1}) = \\ = B(f_1 + \sigma(a_2)f_2 + \ldots + \sigma(a_{n-1})f_{n-1}).$$

Так как

$$\alpha A(e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n) \subset \\ \subset \alpha A(e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_{n-1}e_{n-1}) + \alpha Ae_n,$$

то

$$\alpha A(e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n) = B(b(f_1 + \sigma(a_2)f_2 + \ldots \\ \ldots + \sigma(a_{n-1})f_{n-1}) + b'f_n).$$

С другой стороны,

$$\alpha A(e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n) \subset \\ \subset \alpha A(e_1 + a_ne_n) + \alpha Ae_2 + \ldots + \alpha Ae_{n-1}.$$

Сравнивая коэффициенты, получим $b' = b\sigma(a_n)$, чем и доказано (11).

Если $a_2, \ldots, a_n \in A$ таковы, что элемент $a_2e_2 + \ldots \ldots + a_ne_n \in M$ унимодулярен, то

$$\alpha A(a_2e_2 + \ldots + a_ne_n) \subset A(e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n) + \alpha Ae_1.$$

Используя (11), получим

$$\alpha A(a_2e_2 + \ldots + a_ne_n) = \\ = B(b(f_1 + \sigma(a_2)f_2 + \ldots + \sigma(a_n)f_n) + b'f_1).$$

Кроме того,

$$\alpha A(a_2e_2 + \ldots + a_ne_n) \subset Bf_2 + \ldots + Bf_n.$$

Комбинируя эти два соотношения, получим

$$\alpha A(a_2e_2 + \ldots + a_ne_n) = B(\sigma(a_2)f_2 + \ldots + \sigma(a_n)f_n). \quad (12)$$

Теперь мы утверждаем, что для любых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$, $i = 2, \ldots, n$, имеет место равенство

$$\alpha A(e_i + a_1e_1 + \ldots + a_{i-1}e_{i-1} + a_{i+1}e_{i+1} + \ldots + a_ne_n) = \\ = B(f_i + \sigma(a_1)f_1 + \ldots + \sigma(a_n)f_n). \quad (13)$$

Чтобы доказать его, заметим сначала, используя (1) и (12), что $\alpha A(e_i + e_j) = B(f_i + f_j)$ для любых $j \neq i$. Фиксируя i и заменяя e_1 на e_i, можно повторить предыдущие рассуждения и получить изоморфизм $\rho: A \to B$, такой, что для $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$ справедлив следующий аналог равенства (11):

$$\alpha A(e_i + a_1e_1 + \ldots + a_{i-1}e_{i-1} + a_{i+1}e_{i+1} + \ldots + a_ne_n) = \\ = B(f_i + \rho(a_1)f_1 + \ldots + \rho(a_n)f_n). \quad (14)$$

Полагая в (14) $a_1 = 0$ и сравнивая результат с (12), найдем, что $\sigma = \rho$. Теперь (14) дает (13).

Пусть элемент $e = \sum_{i=1}^{n} a_ie_i \in M$ унимодулярен. Покажем, что

$$\alpha A(a_1e_1 + \ldots + a_ne_n) = B(\sigma(a_1)f_1 + \ldots + \sigma(a_n)f_n). \quad (15)$$

Так как $\alpha Ae \subset \alpha Ae_i + \alpha A(e_i + \ldots + \widehat{a_ie_i} + \ldots)$, $i = 1, 2, 3$, где символ $\widehat{\ }$ означает, что соответствующий член опущен, то можно написать $\alpha Ae = Bf$, где

$$f = b_1\sigma(a_1)f_1 + c_1\sigma(a_2)f_2 + c_1\sigma(a_3)f_3 + \ldots = \\ = c_2\sigma(a_1)f_1 + b_2\sigma(a_2)f_2 + c_2\sigma(a_3)f_3 + \ldots = \\ = c_3\sigma(a_1)f_1 + c_3\sigma(a_2)f_2 + b_3\sigma(a_3)f_3 + \ldots.$$

Сравнивая коэффициенты, найдем

$$\begin{aligned} b_1\sigma(a_1)\sigma(a_2) &= c_3\sigma(a_1)\sigma(a_2) = c_1\sigma(a_1)\sigma(a_2), \\ b_1\sigma(a_1)\sigma(a_i) &= c_2\sigma(a_1)\sigma(a_i) = c_1\sigma(a_1)\sigma(a_i), \quad i \geqslant 3. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как элемент $e = \sum a_ie_i$ унимодулярен, то отсюда следует, что и $\sum \sigma(a_i)f_i$ унимодулярен, поэтому существуют такие

$k_1, \ldots, k_n \in B$, что $\sum \sigma(a_i) k_i = 1$. Положим

$$d = b_1\sigma(a_1) k_1 + c_1\sigma(a_2) k_2 + \ldots + c_1\sigma(a_n) k_n.$$

Используя (16), легко проверить, что $d\sigma(a_1) = b_1\sigma(a_1)$ и $d\sigma(a_i) = c_1\sigma(a_i)$ для $i \geqslant 2$. Значит, элемент d обратим, и (15) доказано.

Пусть Φ: $M \to N$ есть σ-полулинейный изоморфизм, причем $\Phi(e_i) = f_i$. Равенство (15) показывает, что $a = P(\Phi)$. Второе утверждение теоремы доказывается точно так же, как и в классическом случае (см., например, [1], гл. II).

§ 3. Пример

Если M, N — конечномерные векторные пространства одинаковой размерности над полями A и B соответственно, α: $P(M) \to P(N)$ — биекция, причем $p_1 \subset p_2 + p_3$ влечет за собой $\alpha p_1 \subset \alpha p_2 + \alpha p_3$ для любых $p_1, p_2, p_3 \in P(M)$, то можно доказать, что α — проективность (см., например, [1], гл. II). Мы приведем здесь пример, показывающий, что это неверно, если A и B — произвольные кольца.

Пусть K — поле, $A = K\langle x \rangle$ — кольцо формальных степенных рядов от x над K и B — поле частных кольца A. Каноническое вложение σ: $A \to B$ индуцирует σ-полулинейное отображение $A^3 \to B^3$, которое в свою очередь приводит к отображению $P(\sigma)$: $P(A^3) \to P(B^3)$.

Предложение 2. *Отображение $P(\sigma)$ — биекция, причем $p_1 \subset p_2 + p_3$ влечет за собой $P(\sigma) p_1 \subset P(\sigma) p_2 + P(\sigma) p_3$ для любых $p_1, p_2, p_3 \in P(A^3)$. Однако $P(\sigma)$ не является проективностью.*

Доказательство. Пусть (a_1, a_2, a_3), (a_1', a_2', a_3') — унимодулярные элементы из A^3, представляющие один и тот же элемент из $P(B^3)$. Тогда существуют такие $a, a' \in A$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, что $a'(a_1', a_2', a_3') = a(a_1, a_2, a_3)$, т. е. $a'a_i' = aa_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Если $\sum_{i=1}^{3} a_i k_i = 1$, то $a'\lambda = a$, где $\lambda = \sum a_i' k_i \in A$. Аналогично, $a\mu = a'$ для некоторого $\mu \in A$. Отсюда следует, что a и a' отличаются на обратимый элемент кольца A и, следовательно, $A(a_1, a_2, a_3) = A(a_1', a_2', a_3')$. Этим доказано, что $P(\sigma)$ инъективно. Если дан произвольный элемент из $P(B^3)$, то можно записать его в виде Be, где $e \in A^3$. Произведя, если необходимо, деление на подходящую степень элемента x, мы можем считать, что по крайней мере одна из координат вектора e имеет ненулевой свободный член и, следовательно, обратима в A. Поэтому можно считать, что e — унимодулярный эле-

мент модуля A^3, и этим доказана сюръективность отображения $P(\sigma)$. Если $p_1, p_2, p_3 \in P(A^3)$ таковы, что $p_1 \subset p_2 + p_3$, то тривиально проверяется включение $P(\sigma)p_1 \subset P(\sigma)p_2 + P(\sigma)p_3$. Далее $P(\sigma)A(1, 0, 0) = B(1, 0, 0) = B(x, 0, 0) \subset P(\sigma)A(x, 1, 0) + P(\sigma)A(0, 1, 0)$. Однако $(1, 0, 0) \notin A(x, 1, 0) + A(0, 1, 0)$. Это означает, что $P(\sigma)$ не является проективностью.

Предложение 2 и его доказательство полностью сохраняются для любой области с однозначным разложением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Artin, Geometric algebra, New York, 1957. [Русский перевод: Э. Артин, Геометрическая алгебра, «Наука», 1969.]
2. P. Gabriel, Seminaire Heidelberg — Strasbourg, 1965/66, Exposé 1.

АВТОМОРФИЗМЫ ГРУППЫ GL_n НАД ЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ [1])

Ж. Помфрэ, Б. Макдональд

§ 1. Введение и история вопроса

Пусть R — кольцо, $GL_n(R)$ — общая линейная группа матриц порядка n над R.

В 1928 г. Шрайер и ван дер Варден [9] описали автоморфизмы группы $GL_n(R)$, где R — поле. Позднее Дьёдонне [2] исследовал автоморфизмы в случае, когда R — тело. Почти одновременно с ним Хуа Ло-ген и Райнер [3] нашли автоморфизмы групп GL_n над кольцом целых чисел. В 1957 г. Лэндин и Райнер [8] обобщили эти результаты на некоммутативные области главных идеалов. Недавно автоморфизмы линейных групп над областями целостности были независимо исследованы О'Мирой [6] и Янь Ши-цзянем [10]. Более точно, О'Мира описал автоморфизмы групп $GL_n(R)$ и $SL_n(R)$, а Янь Ши-цзянь — автоморфизмы группы $GE_n(R)$, порожденной элементарными трансвекциями.

В этой статье мы выясняем строение автоморфизмов группы $GL_n(R)$ при $n \geqslant 3$, где R — коммутативное локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов $k = R/\mathfrak{m}$ характеристики $\neq 2$.

Общий метод состоит в том, что сначала определяются образы инволюций относительно автоморфизмов, а затем образы трансвекций. Поскольку мы используем классический подход, характеристика поля k должна быть отлична от 2, чтобы можно было найти канонический вид инволюций. Как только описаны образы трансвекций, О'Мира привлекает основную теорему проективной геометрии над полем частных исходного кольца. В наших условиях поля частных не существует, и было подозрение, что наличие делителей нуля может приводить к новым автоморфизмам. И действительно, главное сражение приходится вести с делителями нуля.

В изучении автоморфизмов мы следуем методу Яня, связанному с большими вычислениями и не столь элегантному, как методы над телом или полем.

---

[1]) J. Pomfret, B. R. McDonald, Automorphisms of $GL_n(R)$, R a local ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **173** (1972), 379—388.

Мы покажем, что если $R/\mathfrak{m}$ имеет характеристику, отличную от 2, и $n \geqslant 3$, то всякий автоморфизм группы $GL_n(R)$ может быть описан в терминах тройки (X, ρ, α), где X — эндоморфизм группы единиц кольца R, ρ лежит в $GL_n(R)$ и порождает внутренний автоморфизм, а α — автоморфизм кольца R.

Недавно Оянгурен и Сридхаран [7] обобщили основную теорему проективной геометрии на коммутативные кольца. Вероятно, можно использовать их результат и переработать настоящую статью с применением замечательного подхода О'Миры. В работе [5] это сделано для аналогичного вопроса об автоморфизмах симплектической группы над локальным кольцом. Следует отметить, однако, что для симплектической группы удалось обойти централизаторные рассуждения, используемые О'Мирой для установления проективности. В случае же группы $GL_n(R)$ описание централизаторов трансвекций в духе О'Миры наталкивается на большие трудности, связанные с делителями нуля.

Особенности описания автоморфизмов группы GL_2 подробно обсуждаются в работе Кона [1].

§ 2. Предварительные замечания

Пусть R обозначает локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов $k = R/\mathfrak{m}$. Пусть V — свободный R-модуль ранга n, $n \geqslant 2$. *Общая линейная группа* $GL(V)$ — это группа обратимых R-линейных отображений модуля V в себя. Если зафиксировать базу модуля V, то $GL(V)$ можно отождествить с группой $GL_n(R)$ обратимых матриц порядка n над R. Мы будем работать почти всегда с $GL_n(R)$. *Специальная линейная группа* $SL_n(R)$ — это подгруппа группы $GL_n(R)$, состоящая из матриц с определителем 1. Обозначим через $M_n(R)$ кольцо матриц порядка n над R.

Пусть I — единичная матрица, E_{ij} — стандартная матричная единица, т. е. матрица, у которой на месте (i, j) стоит 1, а на остальных местах — нули, $B_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$ — *элементарная трансвекция* $(i \neq j,\ \lambda \in R)$, $D_i(u) = I + (u-1) E_{ii}$ (u — обратимый элемент из R).

Заметим, что $B_{ij}(\lambda)^{-1} = B_{ij}(-\lambda)$, $B_{ij}(\lambda_1) B_{ij}(\lambda_2) = B_{ij}(\lambda_1 + \lambda_2)$ и $\det(B_{ij}(\lambda)) = 1$. С другой стороны, $D_i(u)^{-1} = D_i(u^{-1})$, $D_i(u_1) D_i(u_2) = D_i(u_1 u_2)$ и $\det(D_i(u)) = u$.

Пусть R^* — группа обратимых элементов кольца R.

Предложение 2.1. *Если R — локальное кольцо, то группа $GL_n(R)$ порождается множеством*

$$\{B_{ij}(\lambda),\ D_k(\mu) \mid \lambda \in R,\ \mu \in R^*,\ i \neq j,\ 1 \leqslant i, j, k \leqslant n\}.$$

Доказательство точно такое же, как в случае поля.

Из предложения 2.1 легко вывести, что на самом деле любая матрица A из $\boldsymbol{GL}_n(R)$ может быть записана в виде $BD_n(u)$, где B — произведение элементарных трансвекций, $u = \det A$, а группа $\boldsymbol{SL}_n(R)$ порождается всеми элементарными трансвекциями.

В оставшейся части этого параграфа предполагается, что характеристика $\chi(R/\mathfrak{m})$ поля $R/\mathfrak{m}$ отлична от 2. Элемент $A \in \boldsymbol{M}_n(R)$ называется *инволюцией*, если $A^2 = I$, и *идемпотентом*, если $A^2 = A$.

Каждой инволюции A можно сопоставить два подмодуля модуля V:

$$N(A) = \{X \in V \mid A(X) = -X\}$$

и

$$P(A) = \{X \in V \mid A(X) = X\}.$$

Очевидно, $P(A) \cap N(A) = 0$. Если $X \in V$, то

$$X = {}^1/_2(X - A(X)) + {}^1/_2(X + A(X)).$$

Таким образом, $V = N(A) \oplus P(A)$. Модули $N(A)$ и $P(A)$, будучи прямыми слагаемыми модуля V, проективны. Так как проективные модули над локальными кольцами свободны, то существует база, в которой инволюция имеет вид $-I_t \oplus \oplus I_{n-t}$, где I_s — единичная клетка порядка s. Отсюда вытекает

Предложение 2.2. *Пусть R — локальное кольцо, $\chi(R/\mathfrak{m}) \neq 2$. Если A — инволюция из $\boldsymbol{GL}_n(R)$, то существует единственное целое число t, такое, что A подобна матрице $-I_t \oplus I_{n-t}$.*

Инволюция, указанная в предложении 2.2, называется инволюцией типа $(t, n-t)$. Пусть E_n — множество всех диагональных матриц порядка n с ± 1 на диагонали. Очевидно, это коммутативное множество инволюций.

Следующее предложение доказывается простой индукцией по r.

Предложение 2.3. *Пусть R — локальное кольцо, $\chi(R/\mathfrak{m}) \neq 2$. Если $\{A_i\}_{i=1}^r$ — множество попарно перестановочных инволюций, то существует матрица $P \in \boldsymbol{GL}_n(R)$, такая, что $P^{-1}A_iP \in E_n$ для всех $i = 1, 2, \ldots, r$.*

Следствие 2.4. *Любое коммутативное множество инволюций типа $(t, n-t)$ содержит не более $\binom{n}{t}$ элементов.*

В любом коммутативном множестве инволюций содержится самое большее 2^n элементов.

Если A — инволюция и $\chi(R/\mathfrak{m}) \neq 2$, то $B = {}^1/_2 (I + A)$ — идемпотент. Из множества 2^n попарно перестановочных инволюций получается 2^n попарно перестановочных идемпотентов. Рассуждения, подобные приведенным выше, показывают, что всякий идемпотент посредством внутреннего автоморфизма может быть приведен к диагональному виду с 0 и 1 на диагонали.

§ 3. Автоморфизмы группы $GL_n(R)$

Пусть J_{ij} обозначает диагональную матрицу с -1 на местах (i, i), (j, j) и с 1 на остальных местах. Матрица J_{ij} является инволюцией типа $(2, n-2)$, $J_{ij}J_{jk} = J_{ik}$ и множество $\{J_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ содержит $\binom{n}{2}$ попарно перестановочных инволюций.

Очень полезна

Теорема 3.1. *Пусть R — локальное кольцо. Тогда матрица $A \in GL_n(R)$ имеет обратимый элемент в каждой строке и в каждом столбце.*

Доказательство. Определитель матрицы A обратим и может быть получен разложением Лапласа по строке или столбцу, поэтому каждая строка и каждый столбец должны содержать обратимый элемент.

Замечание. Мы предполагаем в этом параграфе, что $n \geqslant 3$, R — локальное кольцо и характеристика поля $R/\mathfrak{m}$ отлична от 2.

Теорема 3.2. *Пусть Λ — автоморфизм группы $GL_n(R)$. Тогда в $GL_n(R)$ найдется такая матрица Q, что $\Lambda J_{ij} = Q^{-1}J_{ij}Q$ для всех $i \neq j$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала инволюции типа $(1, n-1)$, скажем $P_1, \ldots, P_n$. Всего их n, они попарно сопряжены и попарно перестановочны. Поэтому n инволюций $\Lambda P_1, \ldots, \Lambda P_n$ также сопряжены, перестановочны и имеют один тип, скажем $(t, n-t)$. Мы хотим доказать, что $t = 1$ или $t = n - 1$. Очевидно, $t \neq 0$ и $t \neq n$. Допустим, что $1 < t < n - 1$ (можно считать также, что $n > 3$, поскольку случай $n = 3$ тривиален). Так как $\binom{n}{1} < \binom{n}{t}$, то существует по крайней мере одна инволюция типа $(t, n-t)$, которая не

лежит в множестве $\Lambda P_1, \ldots, \Lambda P_n$, но сопряжена и перестановочна со всеми ΛP_i. Тогда $\Lambda^{-1}B$ перестановочна со всеми P_i, но отлична от них и сопряжена с ними. Это, однако, невозможно, так как $\{P_i\}$ — максимальное коммутативное множество инволюций типа $(1, n-1)$. Таким образом, $t=1$ или $t=n-1$. Поэтому существует обратимая матрица Q, такая, что $Q(\Lambda P_i)Q^{-1}=\alpha P_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\alpha = \pm I_n$.

Теперь заметим, что $J_{ij}=P_iP_j$, поэтому

$$\Lambda J_{ij}=\Lambda(P_iP_j)=\Lambda(P_i)\Lambda(P_j)=Q^{-1}(\alpha P_j)(\alpha P_j)Q=Q^{-1}J_{ij}Q.$$

Если Λ — автоморфизм группы $\boldsymbol{GL}_n(R)$, то отображение $\overline{\Lambda}$, определенное равенством $\overline{\Lambda}(A)=Q\Lambda(A)Q^{-1}$, также является автоморфизмом и $\overline{\Lambda}(J_{ij})=J_{ij}$. Можно заменить в нашем исследовании Λ на $\overline{\Lambda}$ и считать, что $\Lambda(J_{ij})=J_{ij}$.

Из теоремы 3.1 сразу следует

Лемма 3.3. *Если a, b, c, d—элементы локального кольца R и* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = -I$, $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}^2 = I$, *то* $a=d=0$ *и* $c=-b^{-1}$.

Пусть $S_{i,i+1}$ обозначает подстановочную матрицу

$$S_{i,i+1}=I_{i-1}\oplus\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\oplus I_{n-i-1}.$$

Заметим, что если $DS_{i,i+1}=S_{i,i+1}D$, где $D=\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, то $a_i=a_{i+1}$.

Теорема 3.4. *Пусть Λ — автоморфизм группы $\boldsymbol{GL}_n(R)$. Тогда в $\boldsymbol{GL}_n(R)$ существует такая матрица Q, что*

$$Q\Lambda(S_{i,i+1})Q^{-1}=eI_{i-1}\oplus\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\oplus eI_{n-i-1},\quad 1\leqslant i\leqslant n-1,$$

где $e=\pm 1$.

Доказательство. Мы считаем, что $\Lambda J_{i,i+1}=J_{i,i+1}$. Так как $J_{i,i+1}$ перестановочна с S_{12} при $i=1$ или $i\geqslant 3$, то $J_{i,i+1}=\Lambda J_{i,i+1}$ перестановочна с ΛS_{12}.

Таким образом, если $n=3$ или $n\geqslant 5$, то $\Lambda S_{12}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\oplus$ $\oplus \operatorname{diag}(a_3, \ldots, a_n)$, а если $n=4$, то $\Lambda S_{12}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$. При $n=4$ из соотношений

$$(\Lambda S_{12})^2=\Lambda J_{12}=J_{12},\quad (\Lambda S_{12}\Lambda J_{23})^2=I \tag{1}$$

следует $x=y=0$, $w^2=z^2=1$. Итак, при $n\geqslant 3$ $\Lambda S_{12}= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\oplus \operatorname{diag}(a_3, \ldots, a_n)$. Снова применяя соотношения (1), получаем $c=b^{-1}$, $a=d=0$, $a_i=\pm 1$.

Вообще, для $i=1, \ldots, n-1$

$$\Lambda S_{i,\,i+1}=\operatorname{diag}(a_1^{(i)}, \ldots, a_{i-1}^{(i)})\oplus\begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}\oplus \oplus\operatorname{diag}(a_{i+2}^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}),$$

где $a_j^{(i)}=\pm 1$.

Положим

$$Q=\operatorname{diag}\left(\prod_{t=1}^{n-1} b_t^{-1},\ \prod_{t=2}^{n-1} b_t^{-1}, \ldots, b_{n-1}^{-1}, 1\right)$$

и заметим, что $QJ_{i,\,i+1}Q^{-1}=J_{i,\,i+1}$. Таким образом, матрица $J_{i,\,i+1}$ неподвижна при сопряжении матрицей Q. Легко видеть, что

$$Q\Lambda(S_{i,\,i+1})Q^{-1}= =\operatorname{diag}(a_1^{(i)}, \ldots, a_{i-1}^{(i)})\oplus\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\oplus\operatorname{diag}(a_{i+2}^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}).$$

Довольно простые вычисления показывают, что $S_{i,\,i+1}$ перестановочна с $S_{j,\,j+1}$ при $1\leqslant j\leqslant i-2$, $i+2\leqslant j\leqslant n-1$, и поэтому $Q\Lambda(S_{i,\,i+1})Q^{-1}$ перестановочна с $Q\Lambda(S_{j,\,j+1})Q^{-1}$ при $1\leqslant j\leqslant i-2$, $i+2\leqslant j\leqslant n-1$, откуда $a_1^{(i)}= \ldots =a_{i-1}^{(i)}$ и $a_{i+2}^{(i)}= \ldots =a_n^{(i)}$. Так как $(S_{i-1,\,i}S_{i,\,i+1})^3=I$, то $\left(Q\Lambda(S_{i-1,\,i})\Lambda(S_{i,\,i+1})Q^{-1}\right)^3=I$, и повторное вычисление дает $a_{i-1}^{(i)}=a_{i+2}^{(i)}$. Этим заканчивается доказательство.

Так как сопряжение матрицей Q оставляет на месте инволюции J_{ij}, то можно считать (ср. с замечанием перед леммой (3.3)), что автоморфизм Λ удовлетворяет условию $\Lambda J_{ij}=J_{ij}$ и $\Lambda S_{i,\,i+1}=eI_{i-1}\oplus\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\oplus eI_{n-i-1}$, где $e=1$ или $e=-1$.

Наиболее сложным шагом в описании автоморфизма Λ является

Теорема 3.5. *Если Λ — автоморфизм группы $GL_n(R)$, удовлетворяющий указанным выше условиям, то либо $\Lambda B_{ij}(1)= =B_{ij}(1)$ для всех (i, j), либо $\Lambda B_{ij}(1)=B_{ji}(-1)$ для всех (i, j).*

Доказательство. Так как матрица $B_{12}(1)$ перестановочна с J_{12} и $J_{i,\,i+1}$ при $i \geqslant 3$, то при $n \neq 4$ должно быть

$$\Lambda B_{12}(1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \operatorname{diag}(a_3, \ldots, a_n),$$

а если $n = 4$, то

$$\Lambda B_{12}(1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}.$$

Сначала покажем, что если $n \neq 4$, то $a_3 = \ldots = a_n$. Так как $B_{12}(1)$ перестановочна с $S_{i,\,i+1}$ при $i \geqslant 3$, то $\Lambda B_{12}(1)$ перестановочна с $\Lambda S_{i,\,i+1}$ при $i \geqslant 3$. В частности, из соотношения $\Lambda B_{12}(1)\,\Lambda S_{34} = \Lambda S_{34} \Lambda B_{12}(1)$ имеем

$$e\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & a_3 \\ -a_4 & 0 \end{pmatrix} \oplus e \operatorname{diag}(a_5, \ldots, a_n) =$$
$$= e\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & a_4 \\ -a_3 & 0 \end{pmatrix} \oplus e \operatorname{diag}(a_5, \ldots, a_n)$$

и, следовательно, $a_3 = a_4$. Аналогично заключаем, что $a_3 = a_4 = \ldots = a_n$.

Итак, $\Lambda B_{12}(1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus f I_{n-2}$. Покажем, что $f = e$. Для этого заметим, что

$$\Lambda\,(B_{12}(1)\,J_{23})^2 = I, \tag{2}$$
$$\Lambda\,(S_{12} B_{12}(1))^3 = I, \tag{3}$$
$$\Lambda\left(S_{23}^{-1} B_{12}(1)\, S_{23}\right) = \Lambda B_{13}(1). \tag{4}$$

Из (2) следует равенство $f^2 = 1$, а из (3) — равенство $(ef)^3 = 1$. Следовательно, $ef = 1$ и, так как $e = \pm 1$, то $f = \pm 1$, $e = f$.

Соотношения (2), (3), (4) определяют матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Из (2) получаем, что $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}^2 = I$, а (4) дает

$$\Lambda B_{12}(1)\,\Lambda\left(S_{23}^{-1} B_{12}(1)\, S_{23}\right) = \Lambda\left(S_{23}^{-1} B_{12}(1)\, S_{23}\right) \Lambda\, B_{12}(1).$$

Вычисляя здесь верхние левые клетки порядка 3, получим

$$\begin{pmatrix} a^2 & be & aeb \\ ac & de & bec \\ c & 0 & ed \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b \\ ec & ed & 0 \\ aec & bec & ed \end{pmatrix}.$$

Так как e — обратимый элемент, то $bc = 0$, $a^2 = d^2 = 1$. Прямое вычисление с использованием соотношения $\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}^3 = I$, вытекающего из (3), показывает, что один из элементов b, c обратим и, значит, другой равен нулю (так как $bc = 0$).

Если $c = 0$, то, в силу (3), $bad = 1$. Так как $a = d = \pm 1$, то $b = 1$. Аналогично, если $b = 0$, то $c = -1$.

Итак, либо $\Lambda B_{12}(1) = eI_n + E_{12}$, либо $\Lambda B_{12}(1) = eI_n - E_{21}$ и, ввиду (4), либо $\Lambda B_{13}(1) = eI_n + eE_{13}$, либо $\Lambda B_{13}(1) = eI_n - eE_{31}$ соответственно.

Теперь мы утверждаем, что $e = 1$. Заметим, что $S_{12}^{-1} B_{13}(1) S_{12} = B_{23}(1)$, поэтому либо $\Lambda B_{23}(1) = eI_n + E_{23}$, либо $\Lambda B_{23}(1) = eI_n - E_{32}$ соответственно. Так как коммутатор $[\Lambda B_{12}(1), \Lambda B_{23}(1)] = \Lambda B_{13}(1)$, то $e^4 = e$ и, значит, $e = 1$.

Осталось при $n \neq 4$ определить образы других коммутаторов.

Предположим, что $\Lambda B_{12}(1) = B_{12}(1)$, и заметим, что $\Lambda B_{21}(1) = \Lambda \left(S_{12}^{-1} B_{12}(-1) S_{12}\right) = B_{21}(1)$. Примем предположение индукции, что $\Lambda B_{1i}(1) = B_{1i}(1)$ и $\Lambda B_{i1}(1) = B_{i1}(1)$. Из равенств $S_{i,\,i+1}^{-1} B_{1i}(1) S_{i,\,i+1} = B_{1,\,i+1}(1)$, $S_{i,\,i+1}^{-1} B_{i1}(1) S_{i,\,i+1} = B_{i+1,\,i}(1)$ вытекает, что $\Lambda B_{1,\,i+1}(1) = B_{1,\,i+1}(1)$ и $\Lambda B_{i+1,\,1}(1) = B_{i+1,\,1}(1)$. Поэтому, если $\Lambda B_{12}(1) = B_{12}(1)$, то $\Lambda B_{1i}(1) = B_{1i}(1)$ и $\Lambda B_{i1}(1) = B_{i1}(1)$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Используя соотношения $[B_{ij}(1), B_{jk}(1)] = B_{ik}(1)$ при различных i, j, k, получаем $\Lambda B_{ij}(1) = B_{ij}(1)$ для всех i и j.

Если $\Lambda B_{12}(1) = B_{21}(-1)$, то аналогичные рассуждения дают $\Lambda B_{ij}(1) = B_{ji}(-1)$ для всех i и j.

Этим заканчивается доказательство для $n \neq 4$.

Пусть теперь $n = 4$. Вычисления, которые необходимо проделать, довольно длинные, но не трудные, поэтому мы лишь набросаем доказательство.

Так как матрица $\Lambda B_{12}(1)$ перестановочна с J_{12}, то

$$\Lambda B_{12}(1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}.$$

Так как $B_{12}(1)$ и S_{34} перестановочны, то $x = -y$, $z = w$. Из соотношения (2) следует, что один из элементов b, c обратим, $x = 0$ и $a = d = w$. Наконец, используя (4) и перестановочность матриц $\Lambda B_{12}(1)$ и $\Lambda B_{13}(1)$, заключаем, что если b обратим, то $c = 0$, и наоборот. На этом шаге $\Lambda B_{12}(1)$ имеет одну из следующих форм: либо $\Lambda B_{12}(1) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \oplus$

$\oplus \operatorname{diag}(a, a)$, либо $\Lambda B_{12}(1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \oplus \operatorname{diag}(a, a)$. Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и в случае $n > 4$.

Заметим, что $B_{ij}(-1)$ — матрица, обратно-транспонированная к $B_{ij}(1)$. Для $A \in \boldsymbol{GL}_n(R)$ обозначим матрицу $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ через A^*.

Теорема 3.6. *Если* Λ: $\boldsymbol{GL}_n(R) \to \boldsymbol{GL}_n(R)$ — *групповой автоморфизм, то существуют кольцевой автоморфизм* σ: $R \to R$ *и матрица* $P \in \boldsymbol{GL}_n(R)$, *такие, что*

$$\Lambda A = P^{-1} A^{\sigma} P \quad \text{для всех} \quad A \in \boldsymbol{SL}_n(R)$$

или

$$\Lambda A = P^{-1} (A^{\sigma})^* P \quad \text{для всех} \quad A \in \boldsymbol{SL}_n(R).$$

Доказательство. В силу замечания после предложения 2.1 группа $\boldsymbol{SL}_n(R)$ порождается элементарными трансвекциями, поэтому достаточно найти кольцевой автоморфизм σ и обратимую матрицу P, такие, что $P\Lambda B_{ij}(\lambda) P^{-1} = B_{ij}(\lambda^{\sigma})$ для всех $B_{ij}(\lambda)$ или $P\Lambda B_{ij}(\lambda) P^{-1} = B_{ji}(-\lambda^{\sigma})$ для всех $B_{ij}(\lambda)$. В силу (3.5) и (3.4) можно предполагать, что $P\Lambda B_{ij}(1) P^{-1} = B_{ij}(1)$ и $P\Lambda S_{i,\,i+1} P^{-1} = S_{i,\,i+1}$. Так как матрица $B_{12}(\lambda)$, $\lambda \in R$, перестановочна с $B_{12}(1)$ и $B_{ij}(1)$, $3 \leqslant i,\ j \leqslant n$, то $P\Lambda B_{12}(\lambda) P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \oplus f I_{n-2}$. Так как $S_{23}^{-1} B_{12}(\lambda) S_{23} = B_{13}(\lambda)$, то

$$P\Lambda B_{13}(\lambda) P^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \oplus f I_{n-3}. \tag{5}$$

Коммутаторное соотношение $[B_{12}(\lambda), B_{23}(1)] = B_{13}(\lambda)$ дает $P[\Lambda B_{12}(\lambda), \Lambda B_{23}(1)] P^{-1} = P\Lambda B_{12}(\lambda) P^{-1}$ и

$$P\Lambda B_{13}(\lambda) P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & bfa^{-2} \\ 0 & 1 & 1 - fa^{-1} \\ 0 & 0 & a^{-2} \end{pmatrix} \oplus I_{n-3}. \tag{6}$$

Теперь определим σ: $R \to R$, полагая $\lambda^{\sigma} = \beta$, если $P\Lambda B_{12}(\lambda) P^{-1} = I_n + \beta E_{12}$. Очевидно, $P\Lambda B_{ij}(\lambda) P^{-1} = B_{ij}(\lambda^{\sigma})$ и отображение σ аддитивно. Если $\lambda^{\sigma} = 0$, то $\Lambda B_{12}(\lambda) = I_n$ и $\lambda = 0$. Поэтому σ инъективно. Чтобы показать мультипликативность отображе-

ния σ, рассмотрим цепочку равенств

$$B_{13}\left((\lambda_1\lambda_2)^\sigma\right) = P\Lambda B_{13}(\lambda_1\lambda_2)\, P^{-1} = \\ = P\,[\Lambda B_{12}(\lambda_1),\ \Lambda B_{23}(\lambda_2)]\, P^{-1} = B_{13}\left(\lambda_1^\sigma\lambda_2^\sigma\right).$$

Итак, σ — кольцевой мономорфизм. Остается показать, что σ сюръективно. Очевидно, $\Lambda(\boldsymbol{SL}_n(R))$ лежит в $\boldsymbol{SL}_n(R)$ и имеет порядковый идеал R (см. [4]). Далее, подгруппа $\Lambda(\boldsymbol{SL}_n(R))$ нормальна в $\boldsymbol{GL}_n(R)$, поэтому, в силу результатов Клингенберга о нормальных подгруппах [4], она совпадает с $\boldsymbol{SL}_n(R)$. Если r — произвольный элемент из R, то существует произведение $B = \prod B_{ij}(\lambda_{ij})$ элементарных трансвекций, такое, что $P\Lambda(B)\,P^{-1} = B_{12}(r)$. Следовательно, r является конечной суммой конечных произведений элементов вида λ_{ij}^σ. Поэтому σ сюръективно и, значит, является автоморфизмом кольца R.

Теперь мы в состоянии описать действие автоморфизмов на группе $\boldsymbol{GL}_n(R)$. Сформулируем наши предположения полностью.

Теорема 3.7. *Пусть R — локальное кольцо, причем характеристика поля $R/\mathfrak{m}$ отлична от 2. Предположим, что $n \geqslant 3$ и Λ: $\boldsymbol{GL}_n(R) \to \boldsymbol{GL}_n(R)$ — групповой автоморфизм. Тогда существуют матрица $P \in \boldsymbol{GL}_n(R)$, кольцевой автоморфизм σ: $R \to R$ и групповой гомоморфизм χ: $R^* \to R^*$, такие, что*

$$\Lambda A = \chi(\det A)\,P^{-1}A^\sigma P \quad \text{для всех} \quad A \in \boldsymbol{GL}_n(R)$$

или

$$\Lambda A = \chi(\det A)\,P^{-1}\left(A^\sigma\right)^* P \quad \text{для всех} \quad A \in \boldsymbol{GL}_n(R).$$

Доказательство. Если $A \in \boldsymbol{GL}_n(R)$, то $A = D_n(r)\,B$, где $\det A = r$, B — произведение элементарных трансвекций. Поскольку вид ΛB уже определен, остается определить $\Lambda D_n(r)$. Будем считать, что $\Lambda B_{ij}(\lambda) = P^{-1}B_{ij}\left(\lambda^\sigma\right)^* P$ (второй случай рассматривается аналогично). Для любых (i, j) матрица $D_n(r)\,B_{ij}(1)\,D_n(r^{-1})$ лежит в $\boldsymbol{SL}_n(R)$, поэтому

$$P\left(\Lambda D_n(r)\,\Lambda B_{ij}(1)\,\Lambda D_n\left(r^{-1}\right)\right)P^{-1} = \left(\left(D_n(r)\,B_{ij}(1)\,D_n\left(r^{-1}\right)\right)^\sigma\right)^* = \\ = D_n(r^\sigma)^{-1}\,B_{ji}(-1)\,D_n(r^\sigma).$$

Отсюда

$$D_n\left(r^\sigma\right)P\Lambda D_n(r)\,P^{-1}B_{ji}(-1) = B_{ji}(-1)\,D_n\left(r^\sigma\right)P\Lambda D_n(r)\,P^{-1}.$$

Таким образом, матрица $D_n(r^\sigma) P\Lambda D_n(r) P^{-1}$ перестановочна с $B_{ji}(-1)$ при $i \neq j$ и, следовательно, скалярна, т. е.

$$\Lambda D_n(r) = (\text{скаляр}) \cdot P^{-1} D_n(r^\sigma)^{-1} P.$$

Определим χ: $R^* \to R^*$, полагая

$$\chi(r) = \text{скаляр, ассоциированный с } \Lambda D_n(r).$$

Из соотношения $\Lambda(D_n(r_1) D_n(r_2)) = \Lambda D_n(r_1 r_2)$ следует, что $\chi(r_1)\chi(r_2) = \chi(r_1 r_2)$, т. е. χ — гомоморфизм группы R^*. Этим заканчивается доказательство.

Кольцевые гомоморфизмы ρ_t: $R \to R/\mathfrak{m}^t$ индуцируют гомоморфизмы групп b_t: $\boldsymbol{GL}_n(R) \to \boldsymbol{GL}_n(R/\mathfrak{m}^t)$, $t = 1, 2, 3, \ldots$. Для каждого t

$$b_t^{-1} \cdot (\text{центр группы } \boldsymbol{GL}_n(R/\mathfrak{m}^t))$$

есть *общая конгруэнц-подгруппа по модулю* $\mathfrak{m}^t$, обозначаемая через $\boldsymbol{GC}_n(R, t)$. *Специальная конгруэнц-подгруппа* $\boldsymbol{SC}_n(R, t)$ *по модулю* $\mathfrak{m}^t$ — это множество матриц P из $\boldsymbol{GL}_n(R)$, таких, что $b_t(P) = I$, $\det(P) = 1$. Для кольца $R = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^s$ вычетов по модулю p^s, где p — простое число, с помощью комбинаторных соображений доказано, что определенные выше конгруэнц-подгруппы автоморфно допустимы.

Следствие 3.8. *Пусть R — локальное кольцо, причем характеристика поля вычетов $R/\mathfrak{m}$ отлична от 2. Тогда при $n \geqslant 3$ подгруппы $\boldsymbol{GC}_n(R, t)$ и $\boldsymbol{SC}_n(R, t)$ автоморфно допустимы в $\boldsymbol{GL}_n(R)$ для $t \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $\Lambda(A) = \chi(\det A) P^{-1} A^\sigma P$ для всех A из $\boldsymbol{GL}_n(R)$ (второй случай разбирается аналогично). Если $A \in \boldsymbol{GC}_n(R, t)$, то $A = rI + N$, где N — матрица порядка n с элементами из $\mathfrak{m}^t$. Прямое вычисление показывает, что $\Lambda(A)$ лежит в $\boldsymbol{GC}_n(R, t)$. Как показал Клингенберг [4], $\boldsymbol{SC}_n(R, t) = [\boldsymbol{GL}_n(R), \boldsymbol{GC}_n(R, t)]$, откуда и следует утверждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. M. Cohn, On the structure of GL_2 of a ring, *Publ. Math. IHES* № 30 (1966), 5—53. [Русский перевод: см. наст. сборник, стр. 31—56.]
2. J. Dieudonné, On the automorphisms of the classical groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, № 2 (1951), 1—95.
3. L. K. Hua, I. Reiner, Automorphisms of the unimodular group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 331—348.

4. W. Klingenberg, Lineare Gruppen über lokalen Ringen, *Amer. J. Math.*, **83**, № 1 (1961), 137—153.

5. L. McQueen, B. R. McDonald, Automorphisms of the symplectic group over a local ring, *J. Algebra*, **30**, № 1—3 (1974), 485—495.

6. O. T. O'Meara, The automorphisms of the linear groups over any integral domain, *J. reine angew. Math.*, **223** (1966), 56—100.

7. M. Ojanguren, R. Sridharan, A note on the fundamental theorem of projective geometry, *Comm. Math. Helv.*, **44**, № 3 (1969), 310—315. [Русский перевод: см. наст. сборник, стр. 166—175.]

8. J. Landin, I. Reiner, Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain, *Ann. Math.*, **65**, № 3 (1957), 519—526.

9. O. Schreier, B. L. van der Waerden, Die Automorphismen der projektiven Gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **6** (1928), 303—322.

10. Yen Shih-chien, Linear groups over a ring, *Acta Math. Sinica*, **15** (1965), 455—468 (=*Chinese Math. Acta*, **7** (1965), 163—179). [Русский перевод: см. наст. сборник, стр. 226—249.]

АВТОМОРФИЗМЫ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ КОНГРУЭНЦ-ГРУПП [1])

Р. Солацци

В 1948—1968 гг. автоморфизмы симплектических групп $\boldsymbol{Sp}_n(V)$ исследовали Хуа [5], Дьёдонне [3], Риккарт [9], Райнер [8], Вань и Ван [10], О'Мира [6]. Центральную роль в их методах играла техника двойных централизаторов инволюций. Однако симплектические конгруэнц-группы над областями целостности могут не содержать инволюций, поэтому обычные методы к ним, вообще говоря, неприменимы. Другой недостаток старой техники инволюций состоит в том, что ее применение к проективным группам упирается в трудную проблему теоретико-группового различения проективных инволюций первого и второго рода.

В настоящей работе мы приспособим к изучению симплектических групп метод О'Миры [7], не использующий инволюций. Будет удобно исследовать автоморфизмы симплектических конгруэнц-групп и проективных конгруэнц-групп одновременно. Обозначим символом $^-$ естественное отображение группы $\boldsymbol{Sp}_n(V)$ на $\boldsymbol{Sp}_n(V)/\pm 1 = \boldsymbol{PSp}_n(V)$ и рассмотрим подгруппу G группы $\boldsymbol{PSp}_n(V)$, такую, что для любой прямой L из V в G существует нетривиальная (проективная) трансвекция с собственной прямой L; будем говорить, что группа с этим свойством имеет *достаточно много* (*проективных*) *трансвекций*. Мы покажем, что при $n \geqslant 6$ каждый автоморфизм Λ группы G отображает проективные трансвекции в проективные трансвекции. Таким образом, Λ индуцирует биекцию на множестве проективных трансвекций из G, а она в свою очередь индуцирует коллинеацию $L \longmapsto L'$ прямых векторного пространства V. По основной теореме проективной геометрии существует полулинейный изоморфизм g пространства V на себя, тоже отображающий L на L' для всех прямых L из V, причем g переводит ортогональные векторы в ортогональные. Изоморфизм g определяет в группах $\boldsymbol{Sp}_n(V)$ и $\boldsymbol{PSp}_n(V)$ автоморфизмы Λ_g и $\overline{\Lambda}_g$ соответственно, где $\Lambda_g(\sigma) = g\sigma g^{-1}$ и $\overline{\Lambda}_g(\bar{\sigma}) = \overline{\Lambda_g(\sigma)}$ для σ из $\boldsymbol{Sp}_n(V)$. Мы покажем, что $\Lambda = \overline{\Lambda}_g|_G$.

---

[1]) R. E. Solazzi, The automorphisms of the symplectic congruence groups, *J. Algebra*, **21**, № 1 (1972), 91—102.

Как следствие этого результата легко описываются автоморфизмы любой подгруппы S из $\boldsymbol{Sp}_n(V)$, имеющей достаточно много трансвекций: каждый автоморфизм Λ группы S естественным образом индуцирует автоморфизм $\overline{\Lambda}$ проективной группы $\overline{S}$, поэтому $\Lambda\sigma = \chi(\sigma)\Lambda_g(\sigma)$ для всех σ из S, где χ — гомоморфизм группы S в группу ± 1.

Наконец, мы применим полученные результаты к симплектическим конгруэнц-группам над областью целостности $\mathfrak{o}$. Пусть M — ограниченный $\mathfrak{o}$-модуль. Каждая конгруэнц-подгруппа из $\boldsymbol{Sp}_n(M)$ имеет достаточно много трансвекций, поэтому предыдущие результаты дают описание автоморфизмов конгруэнц-подгрупп из $\boldsymbol{Sp}_n(M)$. Мы не требуем, чтобы модуль M обладал симплектической базой или был свободен. Тем самым получен ответ на вопрос об автоморфизмах нестандартных симплектических групп, поставленный в [6], стр. 137.

§ 1. Предварительные замечания

Пусть V есть n-мерное векторное пространство над полем F, характеристику которого мы обозначим через $\chi(F)$. Предположим, что на V определена знакопеременная билинейная форма (x, y), т. е. билинейная форма со свойством $(x, x) = 0$ для всех $x \in V$. Через W^* обозначим *ортогональное дополнение* к подпространству W из V, т. е.

$$W^* = \{x \in V \mid (x, W) = 0\}.$$

Радикал W, сокращенно $\operatorname{rad} W$, — это подпространство $W \cap W^*$ из W. Подпространство W называется *регулярным*, если $\operatorname{rad} W = 0$, *вырожденным*, если $\operatorname{rad} W \neq 0$, *и вполне вырожденным*, если $\operatorname{rad} W = W$ и $W \neq 0$. Предположим в дальнейшем, что пространство V регулярно, и назовем его *регулярным симплектическим пространством*. Тогда число n четно и все максимальные вполне вырожденные подпространства имеют одинаковую размерность $\frac{1}{2}n$. Если W_1 и W_2 — подпространства из V, то $(W_1^*)^* = W_1$, $\dim W_1 + \dim W_1^* = n$, $(W_1 \cap W_2)^* = W_1^* + W_2^*$ и $\dim \operatorname{rad} W_1 \leqslant n - \dim W_1$, поскольку $\operatorname{rad} W_1 \subseteq W_1^*$. Скажем, что W_1 и W_2 *ортогональны*, если $(W_1, W_2) = 0$.

Симплектическая группа, обозначаемая через $\boldsymbol{Sp}_n(V)$ или просто $\boldsymbol{Sp}(V)$, состоит из всех невырожденных линейных преобразований σ пространства V, таких, что $(\sigma x, \sigma y) = (x, y)$ для любых двух векторов x и y из V. Если $\sigma \in \boldsymbol{Sp}(V)$, то положим $P = \{x \in V \mid \sigma x = x\}$, $R = P^*$; тогда P называется *неподвижным*, а R — *вычетным* пространством для σ. Конечно, $\dim P + \dim R = n$. Когда ясно, о каком $\sigma \in \boldsymbol{Sp}(V)$ идет речь, P

без уточнений обозначает неподвижное, а R — вычетное пространство для σ. Точно так же мы связываем P_i и R_i с преобразованием σ_i из $\boldsymbol{Sp}(V)$.

Для любого σ из $\boldsymbol{Sp}(V)$ имеем $\sigma P=P$, $\sigma R=R$ и

$$P=\ker(\sigma-1_V),\quad R=(\sigma-1_V)V,$$

где 1_V обозначает тождественное отображение V на себя. Таким образом, неподвижное и вычетное пространства для симплектического преобразования в нашем определении совпадают с такими же пространствами в смысле О'Миры [7]. Ясно также, что для любого $\Sigma\in\boldsymbol{Sp}(V)$ преобразование $\Sigma\sigma\Sigma^{-1}$ имеет неподвижное пространство ΣP и вычетное пространство ΣR.

Трансвекция — элемент специальной линейной группы, тождественный на некоторой гиперплоскости. Для $\lambda\in F$ и $a\in V$ рассмотрим отображение $\tau_{a,\lambda}$, определенное правилом $\tau_{a,\lambda}(x)=x+\lambda(a, x)a$ для всех $x\in V$. Легко видеть, что $\tau_{a,\lambda}\in\boldsymbol{Sp}(V)$ и вычетное пространство для $\tau_{a,\lambda}$ совпадает с Fa, причем $\det\tau_{a,\lambda}=1$. Значит, каждое отображение $\tau_{a,\lambda}$ — трансвекция из $\boldsymbol{Sp}(V)$. Обратно, нетрудно показать, что любая трансвекция $\tau\in\boldsymbol{Sp}(V)$ с вычетным пространством Fa совпадает с $\tau_{a,\lambda}$ при подходящем $\lambda\in F$. Вычетное пространство нетривиальной трансвекции называется ее *собственной прямой*; 1_V рассматривается как трансвекция, для которой каждая прямая из V собственная.

Заметим, что $\tau_{a,\lambda}=1_V$ тогда и только тогда, когда $a=0$ или $\lambda=0$. Далее, $\sigma\tau_{a,\lambda}\sigma^{-1}=\tau_{\sigma a,\lambda}$ для всех $\sigma\in\boldsymbol{Sp}(V)$. Если $\lambda\neq0$, то $\tau_{a,\lambda}=\tau_{b,\lambda}$ тогда и только тогда, когда $b=\pm a$. В [1] доказано, что $\boldsymbol{Sp}(V)$ порождается своими трансвекциями; значит, $\det\sigma=1$ для всех $\sigma\in\boldsymbol{Sp}(V)$. Теперь легко доказать следующие утверждения:

Предложение 1.1. *Произведение двух нетривиальных симплектических трансвекций является трансвекцией тогда и только тогда, когда эти трансвекции имеют одинаковые собственные прямые.*

Предложение 1.2. *Пусть $\tau_{a,\lambda}$ — нетривиальная симплектическая трансвекция и $\sigma\in\boldsymbol{Sp}(V)$. Преобразования σ и $\tau_{a,\lambda}$ перестановочны тогда и только тогда, когда $\sigma a=\pm a$,*

Предложение 1.3. *Две нетривиальные симплектические трансвекции перестановочны тогда и только тогда, когда их собственные прямые ортогональны.*

Предложение 1.4. *Пусть σ из $\boldsymbol{Sp}(V)$ имеет вычетное пространство R. Тогда $\sigma^2=1_V$ в том и только том случае, когда $\sigma|_R=-1_R$.*

Доказательство. Применить 1.7 из [7].

Предложение 1.5. *Пусть* σ_1 *и* σ_2 — *элементы группы* $\boldsymbol{Sp}(V)$, *имеющие вычетные пространства* R_1 *и* R_2. *Если* $R_1 \subseteq R_2^*$, *то* $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

Доказательство. Достаточно применить 1.4 из [7].

Для любого векторного пространства W размерности m обозначим через $\boldsymbol{RL}_m(W)$ группу скалярных преобразований из $\boldsymbol{GL}_m(W)$.

Предложение 1.6. *Пусть* W — *двумерное векторное пространство,* $\sigma \in \boldsymbol{GL}_2(W) - \boldsymbol{RL}_2(W)$. *Тогда централизатор* $C_W(\sigma)$ *преобразования* σ *в группе* $\boldsymbol{GL}_2(W)$ *абелев.*

Доказательство. Применить 2.6 из [7].

Определение. Будем говорить, что подгруппа S группы $\boldsymbol{Sp}(V)$ *имеет достаточно много трансвекций*, если для любой прямой L из V существует нетривиальная трансвекция из S с собственной прямой L.

§ 2. Проективные симплектические группы

Проективная симплектическая группа $\boldsymbol{PSp}(V)$ — это факторгруппа группы $\boldsymbol{Sp}(V)$ по ее центру, т. е. $\boldsymbol{PSp}(V) = \boldsymbol{Sp}(V)/\pm 1_V$. Пусть $^-$ обозначает естественное отображение $\boldsymbol{Sp}(V)$ на факторгруппу $\boldsymbol{PSp}(V)$. Назовем $\bar\sigma \in \boldsymbol{PSp}(V)$ *проективной* (*симплектической*) *трансвекцией*, если среди представителей смежного класса $\bar\sigma$ есть трансвекция. При $n \geqslant 2$ преобразования σ и $-\sigma$ не могут одновременно быть трансвекциями, так что можно определить собственную прямую проективной трансвекции $\bar\sigma$ как собственную прямую единственной трансвекции из класса $\bar\sigma$. Заметим также, что если $\bar\sigma_1$ и $\bar\sigma_2$ — элементы группы $\boldsymbol{PSp}(V)$, то $\bar\sigma_1\bar\sigma_2 = \bar\sigma_2\bar\sigma_1$ тогда и только тогда, когда $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ или $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1$.

Предложение 2.1. *Пусть* $n \geqslant 4$ *и* $\chi(F) \neq 2$. *Пусть* $\Sigma \in \boldsymbol{Sp}(V)$ *и* $\Sigma(Fa) \neq Fa$, *где* Fa — *некоторая прямая из* V. *Если* $\tau_{a,\lambda}$ — *нетривиальная трансвекция из* $\boldsymbol{Sp}(V)$, *то* $\bar\Sigma$ *и* $\bar\tau_{a,\lambda}\bar\Sigma^{-1}\bar\tau_{a,-\lambda}$ *не перестановочны.*

Доказательство. Допустим, что

$$\Sigma\tau_{a,\lambda}\Sigma^{-1}\tau_{a,-\lambda} = \tau_{a,\lambda}\Sigma^{-1}\tau_{a,-\lambda}\Sigma,$$

тогда

$$\tau_{\Sigma a,\lambda}\tau_{a,-\lambda} = \tau_{a,\lambda}\tau_{\Sigma^{-1}a,-\lambda}.$$

В самом деле, возьмем вектор x, ортогональный вектору $\Sigma^{-1}a$, но не ортогональный вектору a. Применяя к x преобразования из последнего равенства, получаем

$$-\lambda(a, x)a + \lambda(\Sigma a, x)\Sigma a - \lambda^2(\Sigma a, a)(a, x)\Sigma a = \lambda(a, x)a.$$

Отсюда следует, что $a \in F \cdot \Sigma a$, а это по предположению невозможно.

С другой стороны, равенство

$$\Sigma\tau_{a, \lambda}\Sigma^{-1}\tau_{a, -\lambda} = -\tau_{a, \lambda}\Sigma^{-1}\tau_{a, -\lambda}\Sigma$$

тоже невозможно. В самом деле, так как $n \geqslant 4$, то существует ненулевой вектор x из $(Fa)^* \cap \Sigma(Fa)^* \cap \Sigma^{-1}(Fa)^*$. Но левая часть равенства совпадает с 1_V на $\Sigma(Fa)^* \cap (Fa)^*$, а правая равна -1_V на $(Fa)^* \cap \Sigma^{-1}(Fa)^*$. Значит, $x = -x$, противоречие. Предложение 2.1 доказано.

Пусть G — подгруппа группы $\boldsymbol{PSp}(V)$. Если для любой прямой L из V существует нетривиальная проективная трансвекция с собственной прямой L, принадлежащая группе G, то мы будем говорить, что G *имеет достаточно много проективных трансвекций*. Будем считать в дальнейшем, что G—именно такая группа. Пусть $\Delta = \{\sigma \in \boldsymbol{Sp}(V) | \bar{\sigma} \in G\}$. Тогда Δ — подгруппа группы $\boldsymbol{Sp}(V)$, имеющая достаточно много трансвекций, $\pm 1_V \in \Delta$ и $\bar{\Delta} = G$. Если X — подмножество из Δ, то пусть $C(X)$ обозначает централизатор X в Δ, если же X — подмножество из G, то $C(X)$ — централизатор X в G. Всякий раз, когда дальше упоминаются группы G или Δ, мы предполагаем, что они связаны так же, как и выше, т. е. Δ — прообраз G при отображении $^-$. Пусть DX обозначает коммутант группы X.

Предложение 2.2. *Пусть $\bar{\sigma}$ и $\bar{\Sigma}$ — перестановочные элементы из* $\boldsymbol{PSp}(V)$. *Пусть W — подпространство пространства V, такое, что $2 \cdot \dim W > \dim V$ и $\sigma|_W = \pm 1_W$. Тогда σ и Σ также перестановочны.*

Доказательство. Можно предполагать, что $\chi(F) \neq 2$. Достаточно показать, что равенство $\sigma = -\Sigma\sigma\Sigma^{-1}$ невозможно. Пусть $\sigma|_W = \alpha$, где $\alpha = \pm 1_W$. Выберем в $W \cap \Sigma(W)$ ненулевой вектор x, тогда из равенства $\sigma = -\Sigma\sigma\Sigma^{-1}$ следует заведомо неверное равенство $\alpha x = -\alpha x$.

Предложение 2. 3. *Если $n \geqslant 4$ и A — подгруппа группы* $\boldsymbol{PSp}(V)$, *состоящая целиком из проективных трансвекций, то все элементы из A имеют общую собственную прямую.*

Доказательство. Прямое вычисление, использующее формулу для симплектических трансвекций, показывает, что произведение двух проективных симплектических трансвекций является проективной трансвекцией тогда и только тогда, когда они имеют общую собственную прямую. Поскольку A замкнуто относительно умножения, то все элементы A имеют общую собственную прямую, что и требовалось доказать.

Пусть L — прямая из V. Обозначим через $\overline{T}(L)$ группу всех проективных трансвекций из G с собственной прямой L.

Предложение 2.4. *Если $n \geqslant 4$, то $\overline{T}(L)$ — максимальная группа проективных трансвекций из G. Каждая максимальная группа проективных трансвекций из G имеет вид $\overline{T}(L)$ для подходящей прямой L.*

Доказательство. Из предложения 2.3 следует, что $\overline{T}(L)$ — максимальная группа проективных трансвекций из G. С другой стороны, если A — максимальная группа проективных трансвекций из G, то 2.3 показывает, что все элементы A имеют общую собственную прямую, скажем L. Значит, $A \subseteq \overline{T}(L)$, и поскольку A максимальна, то $A = \overline{T}(L)$.

§ 3. Вычисления с двойными централизаторами

Определение. Пусть $\sigma \in \boldsymbol{Sp}(V)$. Назовем σ *плоским вращением*, если вычетное пространство R преобразования σ — плоскость; σ называется *регулярным* или *вполне вырожденным* плоским вращением соответственно, если такова плоскость R.

Определение. Для подпространства W из V положим $E(W) = \{\sigma \in \Delta \mid R \subseteq W\}$, где R — вычетное пространство для σ. Очевидно, $E(W)$ — подгруппа группы Δ.

Предложение 3.1. *Пусть $n \geqslant 2$, а σ — регулярное плоское вращение из Δ с вычетным пространством R. Если $\chi(F) \neq 2$, то предположим дополнительно, что $\sigma^2 \neq 1_V$. Тогда $E(R) \subseteq CDC(\sigma)$.*

Доказательство. Так как R^* — неподвижное пространство для σ и $R \cap R^* = 0$, то $\sigma|_R \neq 1_R$. Если $\sigma|_R = -1_R$, то $\sigma^2 = 1_V$ по предложению 1.4, что невозможно. Обозначая через $\boldsymbol{RL}_2(R)$ группу скалярных преобразований из $\boldsymbol{GL}_2(R)$, видим, что $\sigma|_R \in \boldsymbol{Sp}_2(R) - \boldsymbol{RL}_2(R)$. Из предложения 1.6 теперь следует, что централизатор $C_R(\sigma|_R)$ преобразования $\sigma|_R$ в $\boldsymbol{GL}_2(R)$ абелев.

Пусть $\sigma_1 \in DC(\sigma)$. Тогда $\sigma_1 R = R$ и, значит,

$$\sigma_1 |_R \in DC(\sigma)|_R \subseteq DC_R(\sigma|_R) = 1_R.$$

Итак, $\sigma_1|_R = 1_R$; пусть P_1 и R_1 — неподвижное и вычетное пространства для σ_1. Тогда $R_1^* = P_1 \supseteq R$, так что $R \subseteq R_1^*$. Любое преобразование σ_2 из $E(R)$ имеет вычетное пространство $R_2 \subseteq R \subseteq R_1^*$. Следовательно, σ_2 и σ_1 перестановочны (см. 1.5). Таким образом, $E(R) \subseteq CDC(\sigma)$, что и требовалось доказать.

Предложение 3.2. *Пусть $n \geqslant 6$ и $\sigma \in \Delta$ — нетривиальная трансвекция или плоское вращение. Тогда* $CDC(\bar\sigma) \subseteq \overline{E(R)}$.

Доказательство. Пусть P — неподвижное пространство для σ и $L = Fa$ — прямая из P, не лежащая в $\operatorname{rad} P$. Так как $a \notin \operatorname{rad} P$, то существует вектор $b \in P$, такой, что $(a, b) \neq 0$. Поскольку $\dim [(Fa)^* \cap P] \geqslant 3$, то найдется вектор $t \in (Fa)^* \cap P$, линейно независимый с a и b. Положим $c = t + b$. Тогда $(a, c) \neq 0$ и a, b, c — три линейно независимых вектора из P.

Выберем нетривиальные трансвекции $\tau_{a,\lambda}$, $\tau_{b,\beta}$ и $\tau_{c,\alpha}$ из Δ с собственными прямыми Fa, Fb, Fc. Положим $f = \tau_{a,\lambda}\tau_{b,\beta}\tau_{a,\lambda}^{-1}\tau_{b,\beta}^{-1} = \tau_{a,\lambda} \cdot \tau_{\tau_{b,\beta}(a),-\lambda}$. Теперь $(a, \tau_{b,\beta}(a)) = (a, \ a + \beta(b, a)b) \neq 0$. Значит, $\tau_{a,\lambda}$ и $\tau_{\tau_{b,\beta}(a),-\lambda}$ не перестановочны ввиду 1.3, так что f имеет вычетное пространство $Fa + F(\tau_{b,\beta}(a)) = Fa + F(a + \beta(b, a)b) = Fa + Fb$. Аналогично, если положить $g = \tau_{a,\lambda}\tau_{c,\alpha}\tau_{a,\lambda}^{-1}\tau_{c,\alpha}^{-1}$, то g имеет вычетное пространство $Fa + Fc$. Так как $\sigma a = a$, $\sigma b = b$, $\sigma c = c$, то $\tau_{a,\lambda}, \tau_{b,\beta}, \tau_{c,\alpha}$ лежат в $C(\sigma)$. Значит, f и g принадлежат $DC(\sigma)$, $\bar f, \ \bar g \in \overline{DC(\sigma)} \subseteq DC(\bar\sigma)$.

Пусть теперь $\bar\Sigma \in CDC(\bar\sigma)$. Преобразование $\bar\Sigma$ должно быть перестановочным с $\bar f$. Поэтому ввиду 2.2 и условия, что $n \geqslant 6$, Σ и f перестановочны. Значит, вычетное пространство преобразования f инвариантно относительно Σ. Те же рассуждения доказывают Σ-инвариантность вычетного пространства для g. Тогда Σ-инвариантно и их пересечение, т. е. прямая Fa. Итак, все прямые из P, не лежащие в $\operatorname{rad} P$, Σ-инвариантны. Если $\operatorname{rad} P = 0$, то мы заключаем, что Σ-инвариантны все прямые из P. Пусть $\operatorname{rad} P \neq 0$, K — прямая из $\operatorname{rad} P$. Отметим прямую L_0 из P, не принадлежащую $\operatorname{rad} P$. Тогда K — единственная прямая из плоскости $K \oplus L_0$, лежащая в $\operatorname{rad} P$. Поскольку все остальные прямые Σ-инвариантны, то $\Sigma K \subseteq K \oplus L_0$, но Σ — взаимно однозначное преобразование прямых, поэтому $\Sigma K = K$. Таким образом, все прямые из P Σ-инвариантны. Так как $\dim P \geqslant n - 2$ и $n \geqslant 6$, то P не является

вполне вырожденным. Значит, $\Sigma|_P = \pm 1_P$ и $\Sigma \in \pm E(R)$. Поэтому $\overline{\Sigma} \in \overline{\pm E(R)} = \overline{E(R)}$, что и требовалось доказать.

Предложение 3.3. *Пусть $n \geqslant 6$ и $\sigma \in \Delta$ имеет вычетное пространство R. Тогда группа $CDC(\bar{\sigma})$ абелева, если σ — трансвекция или вполне вырожденное плоское вращение, и $CDC(\bar{\sigma})$ неабелева, если σ — регулярное плоское вращение, такое, что $\sigma^2 \neq 1_V$.*

Доказательство. Если σ — трансвекция или вполне вырожденное плоское вращение, то ввиду 3.2 $CDC(\bar{\sigma}) \subseteq \overline{E(R)}$. Так как R вполне вырождено, то из 1.5 следует, что $E(R)$ — абелева группа, откуда и $\overline{E(R)}$ абелева.

Если σ — регулярное плоское вращение и $\sigma^2 \neq 1_V$, то ввиду 3.1 $E(R) \subseteq CDC(\sigma)$. Значит, $\overline{E(R)} \subseteq \overline{CDC(\sigma)} \subseteq CD\overline{C(\sigma)} = CDC(\bar{\sigma})$, так как $\overline{C(\sigma)} = C(\bar{\sigma})$, согласно 2.2. По условию R регулярно, а Δ имеет достаточно много трансвекций, поэтому в $E(R)$ существуют неперестановочные трансвекции τ_1 и τ_2. Тогда в силу 2.2 $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ — неперестановочные проективные трансвекции в $\overline{E(R)} \subseteq CDC(\bar{\sigma})$.

Предложение 3.4. *Пусть $n \geqslant 6$ и $\chi(F) \neq 2$. Пусть $\bar{\sigma}$—проективная трансвекция из G, а Λ—автоморфизм группы G. Тогда $\Lambda\bar{\sigma}$ — также проективная трансвекция.*

Доказательство. Можно считать, что $\bar{\sigma} \neq \overline{1}_V$. Пусть L — собственная прямая для $\bar{\sigma}$ и $\Lambda\bar{\sigma} = \overline{\Sigma}$. Так как $\overline{\Sigma} \neq 1$, то выберем прямую L_1, удовлетворяющую условию $\Sigma L_1 \neq L_1$. Пусть $\tau_{a,\lambda}$ — нетривиальная трансвекция в Δ с собственной прямой $L_1 = Fa$. Ввиду 2.1 $\overline{\Sigma}$ и $\bar{\tau}_{a,\lambda}\overline{\Sigma}^{-1}\bar{\tau}_{a,\lambda}^{-1}$ не перестановочны. Положим $T = \tau_{a,\lambda}$, $h = \Sigma T \Sigma^{-1} T^{-1}$. Будучи произведением двух трансвекций с разными собственными прямыми, преобразование h имеет в качестве вычетного пространства плоскость $R = \Sigma L_1 + L_1$. Пусть $\Lambda\bar{\tau} = \overline{T}$ и $f = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$. Ясно, что $\Lambda\bar{f} = \bar{h}$, а поскольку $\overline{\Sigma}$ и $\overline{T}\overline{\Sigma}^{-1}\overline{T}^{-1}$ не перестановочны, то таковы и $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}\bar{\sigma}^{-1}\bar{\tau}^{-1}$. Следовательно, не перестановочны и σ, $\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$.

Мы утверждаем, что f — регулярное плоское вращение, не являющееся инволюцией. В самом деле, $f = \sigma(\tau\sigma^{-1}\tau^{-1})$ — произведение двух неперестановочных трансвекций, поэтому f — регулярное плоское вращение. Его вычетным пространством является $L + \tau L$. Далее, поскольку $\Sigma T \Sigma^{-1} = \tau_{\Sigma a, \lambda}$ и $T^{-1} = \tau_{a,-\lambda}$, то $R = Fa + \Sigma Fa$ инвариантно относительно $\Sigma T \Sigma^{-1}$ и T^{-1}. Поэтому $\Sigma T \Sigma^{-1}$ и T^{-1} одновременно индуцируют на R либо 1_R, либо нетривиальные трансвекции с различными

собственными прямыми (в зависимости от того, какое из соотношений $(a, \Sigma a) = 0$, $(a, \Sigma a) \neq 0$ выполняется). В любом случае $h|_R \neq -1|_R$, так как $\chi(F) \neq 2$. Ввиду 1.4 $h^2 \neq 1_V$ и, конечно, $h^2 \neq -1_V$. Следовательно, $\bar{h}^2 \neq \bar{1}_V$, откуда $\bar{f}^2 \neq \bar{1}_V$ и $f^2 \neq 1_V$. Таким образом, f — регулярное плоское вращение, не являющееся инволюцией.

Теперь мы утверждаем, что h — также регулярное плоское вращение. Прежде всего в силу указанных выше свойств f и ввиду 3.3 получаем, что группа $CDC(\bar{f})$ неабелева, так что и $CDC(\bar{h})$ неабелева. Если $L_1 + \Sigma L_1 = R$ — вырожденная плоскость, то из 3.3 следует, что $CDC(\bar{h})$ абелева, и это противоречит доказанному. Таким образом, мы видим, что R — регулярная плоскость, значит, h — регулярное плоское вращение.

Покажем, что $\Lambda\bar{\sigma}$ — проективная трансвекция. Так как f — неинволютивное регулярное плоское вращение, а собственная прямая L для σ содержится в вычетном пространстве $L + \tau L$ для f, то из 3.1 следует, что $\bar{\sigma} \in \overline{CDC(f)} \subseteq CD\overline{C(f)}$. Но $\overline{C(f)} = C(\bar{f})$, если принять во внимание, что f — плоское вращение, а также 2.2. Поэтому $\bar{\sigma} \in CDC(\bar{f})$ и, значит, $\Lambda\bar{\sigma} \in CDC(\Lambda\bar{f})$, откуда $\bar{\Sigma} \in CDC(\bar{h}) \subseteq \overline{E(R)}$ в силу 3.2, где R — регулярная плоскость, совпадающая с вычетным пространством для h. Поскольку $\bar{\Sigma} \in \overline{E(R)}$, то можно считать Σ регулярным плоским вращением или трансвекцией. Но $CDC(\bar{\sigma})$ абелева ввиду 3.3, поэтому $CDC(\Lambda\bar{\sigma}) = CDC(\bar{\Sigma})$ тоже абелева. Кроме того, $\Sigma^2 \neq 1_V$, потому что $\bar{\sigma}^2 \neq \bar{1}_V$ при $\chi(F) \neq 2$. Следовательно, Σ не может быть регулярным плоским вращением, иначе из 3.3 следовала бы неабелевость $CDC(\bar{\Sigma})$. Таким образом, $\bar{\Sigma}$ — трансвекция, а $\Lambda\bar{\sigma} = \Sigma$ — проективная трансвекция, что и утверждалось.

§ 4. Применение к теории автоморфизмов

Начнем с определения двух специальных типов автоморфизмов группы $\mathbf{Sp}(V)$. Вскоре мы убедимся, что каждый автоморфизм группы $\mathbf{Sp}(V)$ будет произведением автоморфизмов этих типов.

Определение. Пусть S — подгруппа группы $\mathbf{Sp}(V)$, имеющая достаточно много трансвекций. Назовем автоморфизм P_χ группы S *гомотетией*, если $P_\chi(\sigma) = \chi(\sigma) \cdot \sigma$ для всех $\sigma \in S$, где χ — гомоморфизм группы S в группу $\pm 1_V$.

Легко доказать следующий результат.

Предложение 4.1. *Пусть S — подгруппа группы $\boldsymbol{Sp}(V)$, имеющая достататочно много трансвекций. Предположим, что $-1_V \in S$ и χ — гомоморфизм S в $\pm 1_V$. Отображение $\sigma \mapsto \chi(\sigma)\cdot\sigma$, $\sigma \in S$, является автоморфизмом группы S тогда и только тогда, когда $\chi(\pm 1_V) = 1_V$.*

Определение. Пусть g — полулинейный изоморфизм V на V. Будем говорить, что g *сохраняет ортогональность*, если из равенства $(x, y) = 0$ следует, что $(gx, gy) = 0$ для всех x, y из V.

Предложение 4.2. *Пусть g — полулинейный изоморфизм пространства V на себя. Тогда g сохраняет ортогональность в том и только том случае, когда $(gx, gy) = \lambda (x, y)^u$ для всех x, y из V, где λ — ненулевой скаляр, не зависящий от x и y, а u — автоморфизм поля, связанный с g.*

Доказательство. Очевидно, если $(gx, gy) = \lambda (x, y)^u$ для всех x, y, то g сохраняет ортогональность. Обратное доказано в [6], стр. 113.

Следствие 4.2а. *Если g — полулинейный изоморфизм V на себя, то g сохраняет ортогональность тогда и только тогда, когда таков g^{-1}.*

Предложение 4.3. *Пусть g — полулинейный изоморфизм V на себя, сохраняющий ортогональность. Отображение Λ_g, определенное правилом $\Lambda_g(\sigma) = g\sigma g^{-1}$ для всех σ из $\boldsymbol{Sp}(V)$, является автоморфизмом группы $\boldsymbol{Sp}(V)$.*

Доказательство. Если $\sigma \in \boldsymbol{Sp}(V)$, то $g\sigma g^{-1}$ — линейное преобразование. Прямые вычисления с помощью 4.2 показывают, что $(g\sigma g^{-1}(x), g\sigma g^{-1}(y)) = (x, y)$ для всех x, y из V. Значит, $g\sigma g^{-1} \in \boldsymbol{Sp}(V)$. Точно так же $g^{-1}\sigma g \in \boldsymbol{Sp}(V)$. Поэтому Λ_g отображает $\boldsymbol{Sp}(V)$ на $\boldsymbol{Sp}(V)$. Очевидно, Λ_g взаимно однозначно и мультипликативно, следовательно, Λ_g — автоморфизм группы $\boldsymbol{Sp}(V)$.

Определение. Пусть g — полулинейный изоморфизм V на V, сохраняющий ортогональность. При $\sigma \in \boldsymbol{Sp}(V)$ положим $\Lambda_g(\sigma) = g\sigma g^{-1}$, тогда Λ_g — автоморфизм группы $\boldsymbol{Sp}(V)$. Определим автоморфизм $\overline{\Lambda}_g$ группы $\boldsymbol{PSp}(V)$, полагая $\overline{\Lambda}_g(\bar{\sigma}) = \overline{\Lambda_g(\sigma)}$ для всех $\bar{\sigma} \in \boldsymbol{PSp}(V)$. Если $\overline{\Lambda}_g(G) = G$, то обозначим ограничение $\overline{\Lambda}_g$ на G снова через $\overline{\Lambda}_g$. Точно так же, если S — подгруппа из $\boldsymbol{Sp}(V)$, имеющая достаточно много трансвекций, и $\Lambda_g(S) = S$, то мы обозначаем ограничение Λ_g на S тем же символом Λ_g.

Предложение 4.4. *Предположим, что* $\dim V \geqslant 2$, *а* G — *подгруппа группы* $\boldsymbol{PSp}(V)$, *имеющая достаточно много трансвекций. Пусть* Λ — *изоморфизм* G *в* $\boldsymbol{PSp}(V)$, *такой, что если* $\bar{\tau}$ — *проективная трансвекция из* G, *то и* $\Lambda\bar{\tau}$ — *проективная трансвекция с той же собственной прямой, что и у* $\bar{\tau}$. *Тогда* Λ *действует на* G *тождественно.*

Доказательство. Пусть $\bar{\sigma}$ — произвольный элемент из G и $\overline{\sigma'} = \Lambda\bar{\sigma}$. Для всякой прямой L из V существует нетривиальная проективная трансвекция $\bar{\tau} \in G$ такая, что L — ее собственная прямая. Тогда $\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\sigma}^{-1}$ — проективная трансвекция с собственной прямой σL. По условию ту же собственную прямую имеет $\Lambda(\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\sigma}^{-1})$. Но $\Lambda(\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\sigma}^{-1}) = \overline{\sigma'}\Lambda\bar{\tau}\overline{\sigma'}^{-1}$ и, так как L — собственная прямая для $\Lambda\bar{\tau}$, то $\sigma' L$ — собственная прямая для $\Lambda(\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\sigma}^{-1})$. Отсюда следует, что $\sigma L = \sigma' L$ для всех прямых L, значит, $\sigma = \pm\sigma'$. Таким образом, $\bar{\sigma} = \overline{\pm\sigma'} = \Lambda\bar{\sigma}$ для всех $\bar{\sigma}$ из G, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\dim V \geqslant 6$, $\chi(F) \neq 2$ и G — подгруппа группы $\boldsymbol{PSp}(V)$, имеющая достаточно много проективных трансвекций. Предположим, что Λ — автоморфизм группы G. Ввиду 3.4 и 2.4 $\Lambda\overline{T}(L)$ — максимальная группа трансвекций из G для любой прямой L в пространстве V. Снова используя 2.4, найдем единственную прямую L', такую, что $\Lambda\overline{T}(L) = \overline{T}(L')$. Легко видеть, что соответствие $L \mapsto L'$ — биекция на множестве прямых из V. Поскольку перестановочность нетривиальных проективных трансвекций равносильна ортогональности их собственных прямых, то условие $(L_1, L_2) = 0$ влечет за собой $(L_1', L_2') = 0$. Любая гиперплоскость описывается как ортогональное дополнение к некоторой прямой, поэтому образы (при соответствии $L \mapsto L'$) всех прямых из некоторой гиперплоскости образуют гиперплоскость. Таким образом, биекция $L \mapsto L'$ удовлетворяет предпосылкам основной теоремы проективной геометрии, а потому существует полулинейный изоморфизм g пространства V на себя с условием, что $gL = L'$ для всех прямых L. Непосредственно видно, что g сохраняет ортогональность. Значит, Λ_g — автоморфизм группы $\boldsymbol{Sp}(V)$ по предложению 4.3. Теперь нетрудно заметить, что $\overline{\Lambda}_g^{-1} \circ \Lambda$ — изоморфизм группы G в $\boldsymbol{PSp}(V)$, удовлетворяющий предположениям из 4.4. Следовательно, $\Lambda = \overline{\Lambda}_g$ и справедлива

Теорема 4.5. *Пусть* V — *векторное пространство над полем* F, $\chi(F) \neq 2$, $\dim V \geqslant 6$. *Пусть* G — *подгруппа группы* $\boldsymbol{PSp}(V)$, *имеющая достаточно много проективных трансвекций*

а Λ — автоморфизм группы G. Тогда существует полулинейный изоморфизм g пространства V на себя, сохраняющий ортогональность и такой, что $\overline{\Lambda} = \Lambda_g$.

Следствие 4.5а. *Пусть V, $\chi(F)$ и n удовлетворяют предпосылкам из 4.5. Пусть S — подгруппа группы $\boldsymbol{Sp}(V)$, имеющая достаточно много трансвекций, и Λ — автоморфизм группы S. Тогда существуют полулинейный изоморфизм g пространства V на себя, сохраняющий ортогональность, и гомоморфизм χ группы S в $\pm 1_V$, такие, что $\Lambda\sigma = \chi(\sigma) \cdot \Lambda_g(\sigma)$ для всех $\sigma \in S$.*

Доказательство. Отображение $\overline{\Lambda}$ группы $\overline{S}$, определенное по правилу $\overline{\Lambda}(\bar{\sigma}) = \overline{\Lambda\sigma}$, $\sigma \in S$, является автоморфизмом группы $\overline{S}$, значит, $\overline{\Lambda} = \Lambda_g$ для некоторого g. Поскольку $\overline{\Lambda\sigma} = \overline{\Lambda_g(\sigma)}$ для всех σ из S, то $\Lambda\sigma = \chi(\sigma) \cdot \Lambda_g(\sigma)$, где $\chi(\sigma) = \pm 1_V$. Но Λ — автоморфизм, поэтому χ — гомоморфизм. Следствие доказано.

Предложение 4.6. *Пусть $n \geqslant 6$, $\chi(F) \neq 2$ и S — подгруппа группы $\boldsymbol{Sp}(V)$, имеющая достаточно много трансвекций. Предположим, что $-1_V \in S$. Тогда существуют гомотетия P_χ и автоморфизм Λ_g группы S, такие, что $\Lambda = P_\chi \circ \Lambda_g$.*

Доказательство. Ввиду 4.5а имеем $\Lambda\sigma = \chi_1(\sigma)\Lambda_g(\sigma)$ для всех σ из S, где χ_1 — гомоморфизм S в $\pm 1_V$, а Λ_g — автоморфизм группы $\boldsymbol{Sp}(V)$. Положим $\chi(\sigma) = \chi_1(\Lambda_g^{-1}(\sigma))$ для всех σ из S. Так как $\chi(\pm 1_V) = 1_V$, то из 4.1 следует, что отображение $\sigma \to \chi(\sigma)\sigma = P_\chi(\sigma)$ — гомотетия на S. Очевидно, $\Lambda = P_\chi \circ \Lambda_g$, что и требовалось доказать.

§ 5. Автоморфизмы конгруэнц-групп

Пусть в дальнейшем $\mathfrak{o}$ обозначает область целостности с полем частных F, V — регулярное n-мерное симплектическое пространство над F. Назовем размерностью свободного $\mathfrak{o}$-модуля мощность любой базы этого модуля. В работе [6] определен *ограниченный* $\mathfrak{o}$-модуль M как модуль, для которого существует $\mathfrak{o}$-линейный изоморфизм в свободный $\mathfrak{o}$-модуль конечной размерности. Мы будем обозначать через M ограниченный $\mathfrak{o}$-модуль, содержащийся в V и такой, что $V = FM$, где $FM = \{\alpha x \mid \alpha \in F, x \in M\}$. Определим коэффициент $\mathfrak{c}_x$ вектора $x \in V$, полагая $\mathfrak{c}_x = \{\alpha \in F \mid \alpha x \in M\}$; $\mathfrak{c}_x$ — дробный идеал кольца $\mathfrak{o}$. *Симплектическая группа* $\boldsymbol{Sp}_n(M)$ ограниченного модуля M — это по определению группа $\{\sigma \in \boldsymbol{Sp}(V) \mid \sigma M = M\}$.

Допустим, что $\mathfrak{a}$ — ненулевой идеал, содержащийся в $\mathfrak{o}$. Пусть

$$\mathfrak{a}M = \Big\{\sum_{\text{кон.}} \beta x \mid \beta \in \mathfrak{a},\ x \in M\Big\}.$$

Симплектические конгруэнц-группы — это по определению группа $\boldsymbol{Sp}_n(M;\mathfrak{a}) = \{\sigma \in \boldsymbol{Sp}_n(M) \mid (\sigma - 1_V)M \subseteq \mathfrak{a}M\}$ и группа $\boldsymbol{TSp}_n(M;\mathfrak{a})$, порожденная всеми трансвекциями, лежащими в $\boldsymbol{Sp}_n(M;\mathfrak{a})$. Отметим, что $\boldsymbol{Sp}_n(M;\mathfrak{o}) = \boldsymbol{Sp}_n(M)$, $\boldsymbol{TSp}_n(M;\mathfrak{o}) = \boldsymbol{TSp}_n(M)$, $\boldsymbol{TSp}_n(M;\mathfrak{a}) \subseteq \boldsymbol{Sp}_n(M;\mathfrak{a})$ и все эти подгруппы нормальны в $\boldsymbol{Sp}_n(M)$. Если M — ненулевой ограниченный $\mathfrak{o}$-модуль, а ρ — произвольный ненулевой линейный функционал на $V = FM$, то ρM — дробный идеал кольца $\mathfrak{o}$. Легко видеть, что

$$\lambda(a, M) \subseteq \mathfrak{c}_a \cdot \mathfrak{a} \Rightarrow \lambda(a, M)\, a \subseteq \mathfrak{a}M \Rightarrow \tau_{a,\lambda} \in \boldsymbol{Sp}_n(M;\mathfrak{a}).$$

Предложение 5.1. *При $n \geqslant 2$ группа $\boldsymbol{TSp}_n(M;\mathfrak{a})$ имеет достаточно много трансвекций.*

Доказательство. Пусть $L = Fa$ — прямая из $V = FM$. Так как (a, x) — ненулевой линейный функционал на V, то (a, M) — дробный идеал. Выберем ненулевой элемент $\lambda \in F$, удовлетворяющий условию $\lambda(a, M) \subseteq \mathfrak{c}_a \cdot \mathfrak{a}$. Тогда, как и выше, $\tau_{a,\lambda} \in \boldsymbol{TSp}_n(M;\mathfrak{a})$. Предложение доказано.

Пусть $^-$ обозначает естественное отображение $\boldsymbol{Sp}_n(V)$ на $\boldsymbol{Sp}_n(V)/\pm 1_V$. Определим $\boldsymbol{PSp}_n(M;\mathfrak{a})$ как $\overline{\boldsymbol{Sp}_n(M;\mathfrak{a})}$, а $\boldsymbol{PTSp}_n(M;\mathfrak{a})$ как $\overline{\boldsymbol{TSp}_n(M;\mathfrak{a})}$. Назовем эти группы *проективными симплектическими конгруэнц-группами*.

Предложение 5.2. *Пусть $n \geqslant 6$, G — одна из групп $\boldsymbol{PSp}_n(M;\mathfrak{a})$, $\boldsymbol{PTSp}_n(M;\mathfrak{a})$, а Λ — автоморфизм G. Тогда существует полулинейный изоморфизм g пространства V на себя, сохраняющий ортогональность и такой, что $\Lambda = \bar{\Lambda}_g$.*

Доказательство. Если $\chi(F) \neq 2$, то достаточно применить 4.5 и 5.1. Если $\chi(F) = 2$, то к таким группам без изменений применимы рассуждения из [6], стр. 125—131, показывающие, что при подходящем g автоморфизм $\bar{\Lambda}_g^{-1} \circ \Lambda$ сохраняет все трансвекции. Используя рассуждения из доказательства 4.5, получим $\Lambda = \bar{\Lambda}_g$, что и требовалось доказать.

Теперь пусть $n \geqslant 6$, S — одна из групп $\boldsymbol{Sp}_n(M;\mathfrak{a})$, $\boldsymbol{TSp}_n(M;\mathfrak{a})$, а Λ — автоморфизм S. Как и в доказательстве 4.5a, Λ индуцирует автоморфизм $\bar{\Lambda}$ группы $\bar{S}$ и в силу 5.2 $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}_g$ для некоторого полулинейного изоморфизма g про-

странства V на себя, сохраняющего ортогональность. Тогда, как и в доказательстве 4.5а, $\Lambda\sigma = \chi_1(\sigma) \cdot \Lambda_g(\sigma)$ для всех σ из S, где χ_1 — некоторый гомоморфизм S в $\pm 1_V$. Если $-1_V \in S$, то из 4.6 следует, что найдется гомотетия P_χ группы S, такая, что $\Lambda = P_\chi \circ \Lambda_g$. Таким образом, справедлива

Теорема 5.3. *Пусть $n \geqslant 6$, S — одна из симплектических конгруэнц-групп $\boldsymbol{Sp}_n(M; \mathfrak{a})$, $\boldsymbol{TSp}_n(M; \mathfrak{a})$, а Λ — автоморфизм группы S. Тогда существуют гомоморфизм χ_1 группы S в $\pm 1_V$ и сохраняющий ортогональность полулинейный изоморфизм g пространства V на себя, такие, что $\Lambda\sigma = \chi_1(\sigma)\Lambda_g(\sigma)$ для всех $\sigma \in S$. Если $-1_V \in S$, то найдется гомотетия P_χ группы S, удовлетворяющая условию $\Lambda = P_\chi \circ \Lambda_g$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Artin, Geometric algebra, New York — London, 1957. [Русский перевод: Э. Артин, Геометрическая алгебра, «Наука», 1969.]
2. H. Bass, J. Milnor, J. P. Serre, Solution of the congruence subgroup problem for $\boldsymbol{SL}_n$ $(n \geqslant 3)$ and $\boldsymbol{Sp}_{2n}$ $(n \geqslant 2)$, *Publs math. IHES*, № 33 (1967), 59—137.
3. J. Dieudonné, On the automorphisms of the classical groups, New York, 1951.
4. J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, Berlin — Heidelberg — New York, 1963. [Русский перевод: Ж. Дьёдонне, Геометрия классических групп, «Мир», 1974.]
5. L. K. Hua, On the automorphisms of the symplectic group over any field, *Ann. Math.*, **49**, № 4 (1948), 739—759.
6. O. T. O'Meara, The automorphisms of the standard symplectic group over any integral domain, *J. reine angew. Math.*, **230** (1968), 104—138.
7. O. T. O'Meara, Group-theoretic characterization of transvections using *CDC*, *Math. Z.*, **110**, № 5 (1969), 385—394.
8. I. Reiner, Automorphisms of the symplectic modular group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80** (1955), 35—50.
9. C. E. Rickart, Isomorphic groups of linear transformations, II, *Amer. J. Math.*, **73**, № 3 (1951), 697—716.
10. Z. X. Wan, Y. X. Wang, On the automorphisms of symplectic groups over a field of characteristic 2, *Sci. Sinica*, **12** (1963), 289—315.

АВТОМОРФИЗМЫ УНИТАРНЫХ ГРУПП И ИХ КОНГРУЭНЦ-ПОДГРУПП [1])

Р. Солацци

Автоморфизмы унитарных и проективных унитарных групп исследованы только над полями. В частности, отсутствует теория автоморфизмов для групп унитарных матриц с коэффициентами из области целостности.

В настоящей работе рассматриваются подгруппы G проективной унитарной группы $\boldsymbol{PU}_n(V)$, содержащие для любой изотропной прямой L из V по крайней мере одну нетривиальную проективную трансвекцию с собственной прямой L. Мы требуем, чтобы соответствующая эрмитова форма имела индекс Витта не меньше 3. При этих условиях для проективных унитарных трансвекций указываются теоретико-групповые свойства, достаточные, чтобы отличить проективные трансвекции от других проективных унитарных преобразований. Следовательно, всякий автоморфизм Λ группы G должен сохранять множество проективных унитарных трансвекций, а потому Λ определяет биекцию $L \longmapsto L'$ на множестве изотропных прямых пространства V. Мы продолжим эту биекцию на все вполне изотропные подпространства из V и, применяя теорему Чжоу и Дьёдонне ([3], стр. 132), заключим, что она индуцируется унитарным полулинейным изоморфизмом g пространства V на себя. Затем уже нетрудно показать, что автоморфизм Λ задается сопряжением посредством проективного унитарного полулинейного изоморфизма $\bar{g}$, соответствующего изоморфизму g. Наши результаты справедливы при условии, что индекс Витта не меньше 3, а характеристика не равна 2.

Зная автоморфизмы указанных проективных унитарных групп G, легко описать автоморфизмы произвольной подгруппы S обычной унитарной группы $\boldsymbol{U}_n(V)$, содержащей по крайней мере одну нетривиальную трансвекцию на любой изотропной прямой из V. В последнем параграфе эти результаты будут применены к унитарным группам $\boldsymbol{U}_n$, $\boldsymbol{U}_n^+$, $\boldsymbol{TL}_n$ над областями целостности и к их конгруэнц-подгруппам.

---

[1]) R. E. Solazzi, The automorphisms of the unitary groups and their congruence subgroups, *Illinois J. Math.*, 17, № 1 (1973), 153—165.

Мы покажем, что каждая такая унитарная конгруэнц-группа содержит нетривиальную трансвекцию на любой изотропной прямой, и на основе предыдущих результатов получим описание автоморфизмов унитарных конгруэнц-групп.

Метод настоящей статьи — модификация оригинального метода вычетных пространств, введенного О'Мирой [6] для конгруэнц-подгрупп общей и специальной линейных групп.

§ 1. Предварительные замечания

Пусть V — некоторое n-мерное векторное пространство над полем F характеристики $\chi(F)$. Пусть на V задана *эрмитова* форма (x, y), т. е. такое отображение из $V \times V$ в F, что для всех x, y, z из V и для всех α из F

$$(\alpha x + z, y) = \alpha(x, y) + (z, y),$$
$$(x, y) = (y, x)^*,$$

где $\alpha \longmapsto \alpha^*$ — нетождественный автоморфизм порядка 2 поля F.

Пусть E — неподвижное поле автоморфизма *, тогда F/E — расширение Галуа степени 2. Положим $H(x) = (x, x)$. Тогда $H(\alpha x) = \alpha\alpha^* H(x)$ для всех α из F и $H(V) \subseteq E$, поскольку $(x, x) = (x, x)^*$.

При $\chi(F) \neq 2$ найдется $\theta \in E$, такой, что $F = E(\sqrt{\theta})$, любой элемент поля F имеет вид $\alpha + \beta\sqrt{\theta}$ при подходящих α, β из E и $(\alpha + \beta\sqrt{\theta})^* = \alpha - \beta\sqrt{\theta}$.

В дальнейшем предполагается, что (x, y) — невырожденная эрмитова форма на n-мерном векторном пространстве V над F. Невырожденность здесь означает, что из условия $(V, x) = 0$ следует $x = 0$.

Определение. Для подпространства W пространства V положим

$$W^* = \{x \in V \mid (W, x) = 0\}.$$

Подпространство W называется *регулярным*, если $W \cap W^* = 0$, *вырожденным*, если $W \cap W^* \neq 0$, и *вполне вырожденным*, если $W \neq 0$ и $W \subseteq W^*$. Подпространство $\operatorname{rad} W = W \cap W^*$ называется *радикалом* пространства W. Пространство V регулярно, поэтому $\dim W + \dim W^* = \dim V$, $(W)^{**} = W$ [3, стр. 13], $\operatorname{rad} W = \operatorname{rad} W^*$. Так как $\operatorname{rad} W \subseteq W^*$, то $\dim \operatorname{rad} W \leqslant n - \dim W$. Назовем ненулевой вектор x из V *изотропным*, если $H(x) = 0$, и *анизотропным*, если $H(x) \neq 0$. Подпространство W, содержащее изотропный вектор, назовем *изотропным*, а в противном случае — *анизотропным*. В дальнейшем предполагается, что V — изотропное пространство.

По определению n-мерная *унитарная группа*, обозначаемая через $\boldsymbol{U}_n(V)$ или просто $\boldsymbol{U}(V)$, состоит из всех $\sigma \in \boldsymbol{GL}_n(V)$, таких, что $(\sigma x, \sigma y) = (x, y)$ для всех x, y из V. Такие преобразования σ называются *унитарными*. Используя теорему Витта о продолжении унитарных преобразований, можно показать, что максимальные вполне вырожденные подпространства из V имеют равные размерности ([3], стр. 38—42). Эта общая размерность называется *индексом Витта* подпространства V и обозначается $\nu(V)$. В нашем случае $2 \cdot \nu(V) \leqslant n$.

Далее, для $\sigma \in \boldsymbol{U}_n(V)$ положим $P = \{x \in V \mid \sigma x = x\}$, $R = P^*$. Подпространство P называется *неподвижным*, а R — *вычетным* пространством для σ. Имеем $\dim R + \dim P = n$. Всякий раз, когда речь будет идти о преобразовании σ, символы P и R без напоминаний будут обозначать неподвижное и вычетное пространства для σ. Так же связаны P_i и R_i с данным преобразованием σ_i из $\boldsymbol{U}_n(V)$. Наконец, $\operatorname{res}\sigma$ обозначает $\dim(\sigma - 1)V$.

Для любого преобразования $\sigma \in \boldsymbol{U}_n(V)$ имеем $\sigma P = P$, $\sigma R = R$ и

1.1. $$P = \ker(\sigma - 1_V), \qquad R = (\sigma - 1_V)V,$$

где 1_V обозначает тождественное отображение V на себя Если $\Sigma \in \boldsymbol{U}_n(V)$, то $\Sigma\sigma\Sigma^{-1}$ имеет неподвижное пространство ΣP, а вычетное — ΣR.

Определение. Подпространство W из V называется *гиперболической плоскостью*, если оно регулярно, двумерно и изотропно. Подпространство W тогда и только тогда является гиперболической плоскостью, когда оно имеет базу из изотропных векторов x, y, таких, что $(x, y) = 1$ ([3], стр. 38).

Определение. Для подпространств U и W из V, удовлетворяющих условиям $(U, W) = 0$, $U \cap W = 0$, будем обозначать прямую сумму $U \oplus W$ через $U \perp W$. Пусть DG — коммутант группы G, $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ — коммутатор элементов a, b из G.

Трансвекция τ — это элемент из $\boldsymbol{SL}_n(V)$, действующий тождественно на точках некоторой гиперплоскости. Если $\tau \neq 1_V$, то $(\tau - 1_V)V$ — прямая, называемая *собственной прямой* для τ. Тождественное преобразование рассматривается как трансвекция, для которой каждая прямая является собственной. Какие трансвекции τ лежат в $\boldsymbol{U}_n(V)$? Если $\tau \neq 1_V$, $\tau \in \boldsymbol{U}_n(V)$ и P — неподвижная гиперплоскость для τ, то $L = (\tau - 1_V)V = P^*$. Так как $\det\tau = 1$, то $L \subseteq P = L^*$, значит, L — изотропная прямая. Теперь для изотропного вектора a из V и элемента $\lambda \in F$ определим отображение $\tau_{a,\lambda}$ по

правилу

$$\tau_{a,\lambda}(x) = x + \lambda(x, a) \cdot a \quad \text{для всех} \quad x \in V.$$

Вычисления показывают, что каждое $\tau_{a,\lambda}$ — трансвекция, для которой прямая Fa собственная, причем $\tau_{a,\lambda} \in \boldsymbol{U}_n(V)$ в том и только том случае, когда $\lambda + \lambda^* = 0$. Обратно, всякая трансвекция τ из $\boldsymbol{U}_n(V)$ с собственной прямой Fa имеет вид $\tau_{a,\lambda}$, где λ — подходящий элемент из F с нулевым следом. Если $\Sigma \in \boldsymbol{U}_n(V)$, то

$$\Sigma\tau_{a,\lambda}\Sigma^{-1} = \tau_{\Sigma a,\lambda}, \qquad (\tau_{a,\lambda})^{-1} = \tau_{a,-\lambda}.$$

Нетрудно доказать следующие предложения:

1.2. *Пусть* $\tau_{a,\lambda}$, $\tau_{b,\beta} \in \boldsymbol{U}_n(V)$. *Тогда* $\tau_{a,\lambda} = \tau_{b,\beta} \Leftrightarrow a = \alpha b$ *и* $\beta = \alpha\alpha^*\lambda$ *для некоторого* $\alpha \in F$.

1.3. *Произведение двух унитарных трансвекций является трансвекцией тогда и только тогда, когда собственные прямые этих трансвекций совпадают.*

1.4. *Пусть* $\tau_{a,\lambda}$ *— трансвекция из* $\boldsymbol{U}_n(V)$, $\sigma \in \boldsymbol{U}_n(V)$. *Преобразования* σ *и* $\tau_{a,\lambda}$ *перестановочны в том и только том случае, когда* $\sigma a = \alpha a$ *для некоторого* α *из* F, *удовлетворяющего условию* $\alpha\alpha^* = 1$.

1.5. *Две унитарные трансвекции перестановочны, если и только если их собственные прямые ортогональны.*

Для любого m-мерного векторного пространства W обозначим группу скалярных преобразований из $\boldsymbol{GL}_m(W)$ через $\boldsymbol{RL}_m(W)$ или просто через $\boldsymbol{RL}(W)$.

1.6. *Пусть* W *— двумерное векторное пространство и* $\sigma \in \boldsymbol{GL}_2(W) - \boldsymbol{RL}_2(W)$. *Тогда централизатор* $C_W(\sigma)$ *элемента* σ *в группе* $\boldsymbol{GL}_2(W)$ *абелев.*

Доказательство. Применить 2.6 из [6].

1.7. *Пусть* $n \geqslant 2$ *и преобразование* σ *из* $\boldsymbol{U}_n(V)$ *оставляет на месте все изотропные прямые из* V. *Тогда* $\sigma \in \boldsymbol{RL}(V)$.

Доказательство. Если $\dim V = 2$, то σ оставляет на месте по крайней мере три прямых из V, откуда следует, что $\sigma \in \boldsymbol{RL}(V)$.

Если $\dim V > 2$, то σ оставляет на месте все гиперболические плоскости, поскольку гиперболическая плоскость порождается изотропными векторами. Всякая анизотропная прямая является пересечением двух гиперболических

плоскостей ([3], стр. 71), поэтому σ оставляет на месте все прямые, что и требовалось доказать.

1.8. *Пусть* $n \geqslant 4$ *и преобразование* $\Sigma \in \boldsymbol{U}_n(V)$ *таково, что* $\Sigma(Fa) \neq Fa$ *для некоторой изотропной прямой* Fa *из* V. *Пусть* $\tau_{a,\lambda}$ — *нетривиальная трансвекция из* $\boldsymbol{U}_n(V)$. *Тогда* Σ *и* $\tau_{a,\lambda}\Sigma^{-1}\tau_{a,-\lambda}$ *не перестановочны, если* $\chi(F) \neq 2$.

Доказательство. Предположим противное, тогда $\tau_{\Sigma a,\lambda}\tau_{a,-\lambda} = \tau_{a,\lambda}\tau_{\Sigma^{-1}a,-\lambda}$. Существует вектор x, ортогональный вектору $\Sigma^{-1}a$, но не ортогональный вектору a. Применяя к x обе части предыдущего равенства, получим

$$-\lambda(x, a)a + \lambda(x, \Sigma a)\Sigma a - \lambda^2(a, \Sigma a)(x, a)\Sigma a = \lambda(x, a)a,$$

откуда следует, что $a \in F \cdot \Sigma a$. Это противоречит условиям нашего предложения.

Определение. Будем говорить, что подгруппа S группы $\boldsymbol{U}_n(V)$ имеет *достаточно много трансвекций*, если для любой изотропной прямой L из V найдется нетривиальная трансвекция из S с собственной прямой L.

Определим проективную унитарную группу, обозначаемую $\boldsymbol{PU}_n(V)$ или просто $\boldsymbol{PU}(V)$, как факторгруппу группы $\boldsymbol{U}(V)$ по ее центру, т. е. $\boldsymbol{PU}(V) = \boldsymbol{U}(V)/\boldsymbol{RL}(V) \cap \boldsymbol{U}(V)$. Пусть $^{-}$ обозначает естественное отображение группы $\boldsymbol{U}(V)$ на $\boldsymbol{PU}(V)$. Если A — подмножество из $\boldsymbol{U}(V)$, то $\bar{A}$ — образ A при отображении $^{-}$. Назовем $\bar{\sigma}$ из $\boldsymbol{PU}(V)$ *проективной трансвекцией*, если один из представителей смежного класса $\bar{\sigma}$ в $\boldsymbol{U}(V)$ является трансвекцией. При $n \geqslant 2$ два различных представителя класса $\bar{\sigma}$ не могут быть трансвекциями, поэтому можно определить собственную прямую проективной трансвекции $\bar{\sigma}$ как собственную прямую единственной трансвекции из смежного класса $\bar{\sigma}$.

Определение. Пусть G — подгруппа группы $\boldsymbol{PU}(V)$. Будем говорить, что G имеет *достаточно много* (*проективных*) *трансвекций*, если для любой изотропной прямой L из V существует нетривиальная проективная трансвекция из G с собственной прямой L. Положим

$$\Delta = \{\sigma \in \boldsymbol{U}(V) \mid \bar{\sigma} \in G\}.$$

Очевидно, что Δ — подгруппа группы $\boldsymbol{U}(V)$, имеющая достаточно много трансвекций, и $\boldsymbol{RL}(V) \cap \boldsymbol{U}(V) \subseteq \Delta$. Всюду в дальнейшем G и Δ будут употребляться только в определенном

сейчас смысле. Если $A \subseteq \Delta$ или $A \subseteq G$, то $C(A)$ обозначает $C_\Delta(A)$ или $C_G(A)$ соответственно.

Определение. Будем называть элемент группы $\boldsymbol{U}(V)$ *квазисимметрией*, если его вычетное пространство является анизотропной прямой или если он равен 1_V. *Проективная квазисимметрия* — это образ квазисимметрии при отображении $^-$ группы $\boldsymbol{U}(V)$ на $\boldsymbol{PU}(V)$. Наконец, определим *сдвиг* (shearing) как элемент из $\boldsymbol{U}(V)$, действующий тождественно на некоторой гиперплоскости; проективные сдвиги из $\boldsymbol{PU}(V)$ определяются естественным образом.

Определение. Пусть W — подпространство пространства V. Положим $E(W) = \{\sigma \in \Delta \mid R \subseteq W\}$, где R — вычетное пространство для σ.

Определение. Пусть $\sigma \in \boldsymbol{U}(V) \cap \boldsymbol{SL}_n(V)$. Будем говорить, что σ — *плоское вращение*, если его вычетное пространство R — плоскость. Назовем σ *вполне вырожденным плоским вращением* (соотв. *гиперболическим вращением*), если R — вполне вырожденная плоскость (соотв. гиперболическая плоскость).

1.9. *Пусть $\nu(V) \geqslant 3$, P — подпространство из V размерности $\geqslant n-2$. Пусть $P = \operatorname{rad} P \perp W$. Тогда W изотропно.*

Доказательство. Из условия следует, что $n \geqslant 6$. Так как $\operatorname{rad} P = P \cap P^*$, то $\dim \operatorname{rad} P \leqslant 2$. Но $\nu(V) \geqslant 3$, поэтому $\operatorname{rad} P \subseteq T$, где T — некоторое трехмерное вполне вырожденное подпространство пространства V. Значит, $T \subseteq T^* \subseteq (\operatorname{rad} P)^* = P + P^*$. Принимая во внимание, что $W \subseteq P + P^*$, и сравнивая размерности, получим $W \cap T \neq 0$. Таким образом, W изотропно.

1.10. *Пусть $\nu(V) \geqslant 3$, P — подпространство из V размерности $\geqslant n-2$. Всякая изотропная прямая из V, не принадлежащая $\operatorname{rad} P$, лежит в двух различных гиперболических плоскостях из P.*

Доказательство. См. (1) в [3], стр. 42.

1.11. *Пусть σ, $\Sigma \in \boldsymbol{U}(V)$, причем $\bar\sigma$ и $\bar\Sigma$ перестановочны. Допустим, что $\sigma|_W = \alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{RL}(W)$. Если $2\dim W > n$, то σ и Σ тоже перестановочны.*

Доказательство. Так как $\bar\sigma$ и $\bar\Sigma$ перестановочны, то $\sigma = \beta \cdot \Sigma\sigma\Sigma^{-1}$, где $\beta \in \boldsymbol{RL}(V)$. Выберем ненулевой вектор x из $W \cap \Sigma(W)$. Из равенства $\sigma(x) = \beta\Sigma\sigma\Sigma^{-1}(x)$ следует $\alpha = \beta\alpha$, откуда $\beta = 1_V$.

§ 2. Результаты о двойных централизаторах

2.1. *Пусть подгруппа* S *группы* $\boldsymbol{U}_n(V)$ *имеет достаточно много трансвекций. Пусть* σ — *преобразование из* $S \cap \boldsymbol{SL}_n(V)$ *с неподвижным пространством* P *и вычетным пространством* R, *причем* $R \nsubseteq P$ *и* σ *не инволюция. Предположим, что* $n \geqslant 2$ *и* $\dim R = 2$. *Тогда* $E(R) \subseteq CDC(\sigma)$.

Доказательство. Так как $R \nsubseteq P$, то $\sigma|_R \neq 1_R$. Если $\sigma|_R \in \boldsymbol{RL}_2(R)$, то ввиду того, что $1 = \det \sigma = \det \sigma|_R$, получаем $\sigma|_R = -1_R$. Но σ не инволюция. Таким образом, $\sigma|_R \in \boldsymbol{GL}_2(R) - \boldsymbol{RL}_2(R)$. Ввиду 1.6 группа $C_R(\sigma|_R)$ абелева, где $C_R(\sigma|_R)$ обозначает централизатор преобразования $\sigma|_R$ в группе $\boldsymbol{GL}_2(R)$. Если $\sigma_1 \in DC(\sigma)$, то $\sigma_1(R) = R$ и

$$\sigma_1|_R \in DC(\sigma)|_R \subseteq DC_R(\sigma|_R) = 1_R.$$

Значит, $\sigma_1|_R = 1_R$ и $R_1^* = P_1 \supseteq R$. Если $\sigma_2 \in E(R)$, то $R_2 \subseteq R \subseteq R_1^*$. В силу 1.5 из [6] σ_1 и σ_2 перестановочны, т. е. $E(R) \subseteq CDC(\sigma)$.

2.2. *Пусть* $\nu(V) \geqslant 3$ *и преобразование* $\sigma \in \Delta$ *таково, что* $\dim R \leqslant 2$. *Тогда* $CDC(\bar{\sigma}) \subseteq \overline{E(R)}$.

Доказательство. Из условия следует, что $n \geqslant 6$. Возьмем изотропную прямую $L = Fa$ из P, не лежащую в $\operatorname{rad} P$. В силу 1.10 в P найдутся две различные гиперболические плоскости $Fa + Fb$ и $Fa + Fc$, где b и c — изотропные векторы. Пусть τ_a, τ_b, τ_c — нетривиальные трансвекции из Δ с собственными прямыми Fa, Fb, Fc соответственно, $f = [\tau_a, \tau_b]$ и $g = [\tau_a, \tau_c]$. Вычетными пространствами для f и g являются $Fa + Fb$ и $Fa + Fc$ соответственно. Так как σ оставляет a, b и c на месте, то f и g принадлежат $DC(\sigma)$, откуда $\bar{f}$, $\bar{g} \in \overline{DC(\sigma)} \subseteq DC(\bar{\sigma})$.

Если $\bar{\Sigma} \in CDC(\bar{\sigma})$, то $\bar{\Sigma}$ из $\bar{f}$ перестановочны. Так как $n \geqslant 6$, то, согласно 1.11, Σ и f тоже перестановочны. Следовательно, вычетное пространство преобразования f Σ-инвариантно. То же верно и для вычетного пространства преобразования g, поэтому Σ-инвариантно и пересечение этих вычетных пространств — прямая Fa. Таким образом Σ оставляет на месте все изотропные прямые пространства P, не лежащие в $\operatorname{rad} P$. Допустим, что $\operatorname{rad} P \neq 0$, $P = \operatorname{rad} P \perp W$ и прямая K принадлежит $\operatorname{rad} P$. Согласно 1.9, подпространство W изотропно и регулярно. Пусть L_0 — изотропная прямая из W. Все прямые из $K \oplus L_0$ изотропны и, за исключением K, не лежат в $\operatorname{rad} P$. По предыдущему преобразование Σ оставляет на месте все прямые из $K \oplus L_0$, кроме, быть может, прямой K. Отсюда

$\Sigma K = K$. Таким образом, Σ оставляет на месте все изотропные прямые пространства P.

Поскольку W изотропно и регулярно, то ввиду 1.7

$$\Sigma|_W = \lambda, \quad \text{где} \quad \lambda \in \boldsymbol{RL}(V) \cap \boldsymbol{U}(V).$$

Заметим, что $\Sigma|_{\mathrm{rad}\,P} = \lambda$. В этом нетрудно убедиться, рассматривая действие Σ на $K \oplus L_0$. Следовательно, $\sigma|_P = \lambda \cdot 1_P$, $\Sigma \in \lambda \cdot E(R)$ и $\overline{\Sigma} \in \overline{\lambda \cdot E(R)} = \overline{E(R)}$, что и утверждалось.

2.3. *Пусть* $\nu(V) \geqslant 3$, $\sigma \in \Delta$. *Если* σ — *трансвекция или вполне вырожденное плоское вращение, или квазисимметрия, то группа* $CDC(\bar{\sigma})$ *абелева. Если* σ — *гиперболическое вращение и* $\sigma^2 \neq 1_V$, *то группа* $CDC(\bar{\sigma})$ *неабелева.*

Доказательство. Если σ — трансвекция, вполне вырожденное плоское вращение или квазисимметрия, то из 2.2 следует, что $CDC(\bar{\sigma}) \subseteq \overline{E(R)}$. Так как либо $\dim R = 1$, либо R — вполне вырожденная плоскость, то в силу 1.4 из [6] группа $\overline{E(R)}$ абелева.

Пусть σ — гиперболическое вращение, причем $\sigma^2 \neq 1_V$. Согласно 2.1, $E(R) \subseteq CDC(\sigma)$, откуда $\overline{E(R)} \subseteq \overline{CDC(\sigma)} \subseteq CDC(\bar{\sigma})$, поскольку, ввиду 1.11, $\overline{C(\sigma)} = C(\bar{\sigma})$. Так как R — гиперболическая плоскость, а G содержит достаточно много трансвекций, то нетрудно найти две неперестановочные трансвекции, принадлежащие $\overline{E(R)}$.

§ 3. Применение к теории автоморфизмов

3.1. *Допустим, что* Λ — *изоморфизм группы* G *в группу* $\boldsymbol{PU}(V)$, *отображающий всякую проективную трансвекцию из* G *в проективную трансвекцию с той же самой собственной прямой. Тогда* Λ *тождествен на* G.

Доказательство. Пусть L — изотропная прямая пространства V, $\bar{\tau}$ — нетривиальная проективная трансвекция из G с собственной прямой L. Пусть $\bar{\sigma}$ — произвольный элемент группы G и $\bar{\sigma}_1 = \Lambda\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}_1 = \Lambda\bar{\tau}$, $f = \sigma\tau\sigma^{-1}$, $g = \sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}$. Тогда $\Lambda\bar{f}$ — проективная трансвекция с собственной прямой σL, а $\bar{g}$ — проективная трансвекция с собственной прямой $\sigma_1 L$. Так как $\Lambda\bar{f} = \bar{g}$, то $\sigma_1\sigma^{-1}$ оставляет на месте все изотропные прямые из V, а потому, согласно 1.7, $\sigma = \lambda\sigma_1$, где $\lambda \in \boldsymbol{RL}(V) \cap \boldsymbol{U}(V)$. Значит, $\bar{\sigma} = \overline{\lambda\sigma_1} = \Lambda\bar{\sigma}$ для всех $\bar{\sigma}$ из G.

Определение. Пусть g — полулинейный изоморфизм пространства V на себя. Будем называть g *унитарным* полулинейным изоморфизмом, если существует элемент $\lambda \in F$,

такой, что $(gx, gy) = \lambda (x, y)^u$ для всех x, y из V, где u — автоморфизм поля F, связанный с g.

Данный унитарный полулинейный изоморфизм g пространства V на себя определяет отображение Λ_g: $\boldsymbol{U}_n(V) \to \boldsymbol{U}_n(V)$ по правилу $\Lambda_g(\sigma) = g\sigma g^{-1}$ для всех $\sigma \in \boldsymbol{U}_n(V)$. Аналогично определяется отображение $\overline{\Lambda}_g$: $\boldsymbol{PU}_n(V) \to \boldsymbol{PU}_n(V)$ по правилу $\overline{\Lambda}_g(\bar\sigma) = \overline{\Lambda_g(\sigma)}$ для всех $\bar\sigma \in \boldsymbol{PU}_n(V)$. Легко видеть, что Λ_g и $\overline{\Lambda}_g$ — автоморфизмы групп $\boldsymbol{U}_n(V)$ и $\boldsymbol{PU}_n(V)$ соответственно.

3.2. *Пусть g — полулинейный изоморфизм пространства V на себя и $n \geqslant 2$. Преобразование g тогда и только тогда является унитарным полулинейным изоморфизмом, когда из $(x, y) = 0$ следует $(gx, gy) = 0$.*

Доказательство см. в [3], стр. 18.

Замечание. В оставшейся части § 3 предполагается, что $\chi(F) \neq 2$.

3.3. *Пусть Λ — автоморфизм группы G, σ — сдвиг из группы Δ с вычетной прямой L. Предположим, что $\nu(V) \geqslant 3$. Тогда $\Lambda\bar\sigma$ является проективной трансвекцией или проективной квазисимметрией.*

Доказательство. Можно считать, что $\bar\sigma \neq \bar 1_V$. Положим $\overline\Sigma = \Lambda\bar\sigma$. В силу 1.7 существует изотропная прямая Fa из V, такая, что $\Sigma Fa \neq Fa$. Пусть $\tau_{a, \lambda}$ — нетривиальная трансвекция из Δ с собственной прямой Fa. Полагая $T = \tau_{a, \lambda}$ и используя 1.8, получим, что Σ и $T\Sigma^{-1}T^{-1}$ не перестановочны. Принимая во внимание размерности, видим, что равенство $[\Sigma, T] = \alpha T\Sigma^{-1}T^{-1}\Sigma$, $\alpha \in \boldsymbol{RL}(V)$, невозможно. Положим $\Lambda\bar\tau = \overline{T}$, $h = [\Sigma, T]$, $f = [\sigma, \tau]$. Так как $\overline\Sigma$ и $\overline{T}\overline\Sigma^{-1}\overline{T}^{-1}$ не перестановочны, то σ и $\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ тоже не перестановочны, откуда $L \neq \tau L$, $(L, \tau L) \neq 0$ и $L + \tau L$ — вычетное пространство для f. Преобразование h является произведением двух трансвекций $\Sigma T\Sigma^{-1}$ и T^{-1}, которые имеют разные собственные прямые ΣFa и Fa. Значит, h — плоское вращение с вычетным пространством $R = \Sigma Fa + Fa$. Поскольку вектор a изотропен, то плоскость R или гиперболична, или вполне вырождена. Покажем, что справедливо первое.

Из формул $\Sigma T\Sigma^{-1} = \tau_{\Sigma a, \lambda}$, $T^{-1} = \tau_{a, -\lambda}$ следует, что плоскость R инвариантна относительно $\Sigma T\Sigma^{-1}$ и T^{-1}. Преобразования $\Sigma T\Sigma^{-1}$ и T^{-1} индуцируют на R одновременно либо 1_R, либо нетривиальные трансвекции с разными собственными прямыми (в зависимости от соотношений $(a, \Sigma a) = 0$ или

$(a, \Sigma a) \neq 0$). В каждом случае $h|_R = [\Sigma, T]|_R \neq -1_R$, так как $\chi(F) \neq 2$. В силу 1.7 из [6] $\bar{h}^2 \neq 1_V$ и, конечно, $\bar{h}^2 \neq \gamma \cdot 1_V$ при $\gamma \neq 1$. Таким образом, $\bar{h}$ не является инволюцией, а поскольку $\Lambda\bar{f} = \bar{h}$, то и f — не инволюция. Так как f удовлетворяет условию утверждения 2.1, то $E(L + \tau L) \subseteq CDC(f)$. Поэтому

$$\overline{E(L + \tau L)} \subseteq \overline{CDC(f)} \subseteq CD\overline{C(f)} = CDC(\bar{f}),$$

если иметь в виду, что $\overline{C(f)} = C(\bar{f})$ (см. 1.11). Но $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}\bar{\sigma}^{-1}\bar{\tau}^{-1}$ принадлежат $\overline{E(L + \tau L)}$ и не перестановочны, поэтому группа $CDC(\bar{f})$ неабелева, а тогда и группа $CDC(\bar{h})$ неабелева. Если бы плоскость R была вполне вырожденной, то из 2.3 следовала бы абелевость группы $CDC(\bar{h})$. Значит, R — гиперболическая плоскость.

Наконец, покажем, что $\Lambda\bar{\sigma}$ — проективный сдвиг. Поскольку $\bar{\sigma} \in CDC(\bar{f})$, то $\Lambda\bar{\sigma} \in CDC(\Lambda\bar{f}) = CDC(\bar{h})$. В силу 2.2

$$\bar{\Sigma} = \Lambda\bar{\sigma} \in CDC(\bar{h}) \subseteq \overline{E(R)},$$

и можно считать, что вычетное пространство для Σ содержится в R. Допустим, что вычетное пространство для Σ совпадает с R и $\Sigma|_R$ — скалярное преобразование. Так как $CDC(\bar{h}) \subseteq \overline{E(R)}$, то $\bar{\Sigma}$ централизует $CDC(\bar{h})$, а это противоречит тому, что $\bar{\sigma} \notin CCDC(\bar{f})$. Допустим теперь, что вычетное пространство преобразования Σ совпадает с R и $\Sigma|_R$ не скалярно. Тогда из доказательства утверждения 2.1 следует, что $E(R) \subseteq CDC(\Sigma)$, а это противоречит абелевости группы $CDC(\bar{\sigma})$. Таким образом, вычетное пространство для Σ является прямой. Предложение доказано.

Итак, предложение 3.3 утверждает, что произвольный автоморфизм Λ группы G (при сделанных предположениях) отображает проективные сдвиги в проективные сдвиги. Оставим предположения из 3.3 в силе до конца § 3 и покажем, что в действительности Λ отображает проективные трансвекции в проективные трансвекции. Отметим, что если σ_1 и σ_2 — нетождественные сдвиги с вычетными пространствами L_1 и L_2, то $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ в том и только том случае, когда $L_1 = L_2$ или $(L_1, L_2) = 0$. Поэтому, если $\bar{\sigma} \in G$ — нетривиальный сдвиг с вычетной прямой L, то $CC(\bar{\sigma}) = \overline{E(L)}$.

О п р е д е л е н и е. Для подпространства W пространства V обозначим через $S(W)$ множество всех проективных сдвигов из G, вычетные прямые которых содержатся в W. Если $X \subseteq G$,

то $C'(X)$ обозначает множество всех проективных сдвигов из G, перестановочных с любым элементом из X.

Лемма 1. *Пусть $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$ — нетривиальные перестановочные сдвиги из G с различными вычетными прямыми L_1 и L_2. Тогда*

$$C'C'(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \subseteq S(L_1 + L_2),$$

причем

$$C'C'(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = S(L_1 + L_2),$$

если $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$ — трансвекции.

Доказательство. Очевидно,

$$C'(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = S((L_1 + L_2)^*) \cup S(L_1) \cup S(L_2),$$

поэтому $C'C'(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \subseteq S(L_1 + L_2)$. Если σ_1 и σ_2 — трансвекции, то $C'(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = S((L_1 + L_2)^*)$, откуда $S(L_1 + L_2) = C'C'(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$.

Лемма 2. *Пусть справедливы предположения из* 3.3. *Если $\bar{\sigma}_1$ является проективной трансвекцией из G, то $\Lambda\bar{\sigma}_1$ — тоже проективная трансвекция.*

Доказательство. Если поле F имеет характеристику $p > 0$, то каждая неединичная трансвекция имеет порядок p, тогда как порядок любой квазисимметрии не равен p. Значит, можно предполагать, что $\chi(F) = 0$.

Будем считать, что $\bar{\sigma}_1 \neq \bar{1}$. Пусть L_1 — собственная прямая проективной трансвекции $\bar{\sigma}_1$. Выберем такую изотропную прямую L_2 из V, что $(L_2, L_1) \neq 0$ и $L_2 \neq L_1$, а затем возьмем в G нетривиальную проективную трансвекцию $\bar{\sigma}_2$ с собственной прямой L_2. Пусть L_1' и L_2' — вычетные прямые сдвигов $\Lambda\bar{\sigma}_1$ и $\Lambda\bar{\sigma}_2$ соответственно.

Так как вполне вырожденная плоскость $L_1 + L_2$ содержит бесконечное число различных попарно ортогональных изотропных прямых, то подпространство $S(L_1 + L_2) = C'C'(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ содержит бесконечно много различных попарно перестановочных проективных трасвекций с попарно различными двойными централизаторами. Следовательно, $C'C'(\Lambda\bar{\sigma}_1, \Lambda\bar{\sigma}_2)$ содержит бесконечное число различных проективных сдвигов с аналогичными свойствами. Поскольку $C'C'(\Lambda\bar{\sigma}_1, \Lambda\bar{\sigma}_2) \subseteq S(L_1' + L_2')$, то плоскость $L_1' + L_2'$ содержит бесконечно много различных попарно ортогональных прямых. Значит, плоскость $L_1' + L_2'$ вполне вырожденна, а $\Lambda\bar{\sigma}_1$ — проективная трансвекция. Лемма доказана.

Итак, в предположениях из 3.3 автоморфизм Λ группы G переводит проективные трансвекции снова в проективные трансвекции.

Для изотропной прямой L обозначим через $\overline{T}(L)$ группу всех проективных трансвекций из G с собственной прямой L. Согласно 1.3, $\overline{T}(L)$ — максимальная группа проективных трансвекций из G и каждая максимальная группа проективных трансвекций из G совпадает с группой $\overline{T}(L)$ при подходящей изотропной прямой L. Пусть Λ — автоморфизм группы G. В силу леммы 2 $\Lambda\overline{T}(L)$ — максимальная группа проективных трансвекций из G, а потому существует единственная изотропная прямая L', такая, что $\Lambda\overline{T}(L)=\overline{T}(L')$. Легко видеть, что отображение $L\longmapsto L'$ является биекцией на множестве изотропных прямых пространства V. Так как перестановочность двух проективных трансвекций равносильна ортогональности их собственных прямых, то $(L_1, L_2)=0$ в том и только том случае, когда $(L_1', L_2')=0$ для любых двух изотропных прямых L_1 и L_2. Ясно также, что обратная биекция $L'\longmapsto L$ индуцируется автоморфизмом Λ^{-1} группы G.

Пусть теперь L_1, L_2 — различные ортогональные изотропные прямые, а $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ — нетривиальные проективные трансвекции из G с собственными прямыми L_1 и L_2 соответственно. Выше было доказано, что $C'C'(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ совпадает с множеством всех проективных трансвекций из G, собственные прямые которых принадлежат вполне вырожденной плоскости L_1+L_2. Отсюда и из сохранения автоморфизмом Λ проективных трансвекций следует, что если $L_3\subset L_1+L_2$, то $L_3'\subset L_1'+L_2'$ и $L_1'+L_2'$ — вполне вырожденное подпространство из V.

3.4. *Предположим, что $L_1, L_2, \ldots, L_r$ — конечное множество попарно ортогональных изотропных проективных прямых. Тогда*

$$L_1\subseteq L_2+\ldots+L_r\Leftrightarrow L_1'\subseteq L_2'+\ldots+L_r'.$$

Доказательство. Будем доказывать одну импликацию:

$$L_1\subseteq L_2+\ldots+L_r\Rightarrow L_1'\subseteq L_2'+\ldots+L_r'$$

(другая получается аналогично, если использовать Λ^{-1}). Выше было замечено, что утверждение справедливо при $r=3$; если $r=1$ или 2, то оно тривиально. Пусть теперь $r\geqslant 4$, воспользуемся индукцией по r. При $L_1=L_r$ утверждение очевидно. Предположим, что $L_1\neq L_r$, тогда $L_1\subseteq K+L_r$, где K — прямая из $L_2+\ldots+L_{r-1}$. Прямая K изотропна и ортогональна прямым $L_2, \ldots, L_{r-1}$. По индуктивному предположению $K'\subseteq\subseteq L_2'+\ldots+L_{r-1}'$, а ввиду справедливости утверждения при $r=3$ получаем, что $L_1'\subseteq K'+L_r'$. Значит, $L_1'\subseteq K'+L_r'\subseteq\subseteq L_2'+\ldots+L_r'$, что и требовалось доказать.

Из предложения 3.4 следует, что биекция $L \longmapsto L'$ на множестве изотропных прямых, индуцированная автоморфизмом Λ, отображает любое конечное множество независимых попарно ортогональных изотропных прямых на такое же множество. Пусть W — некоторое m-мерное вполне вырожденное подпространство пространства V. Выберем некоторую базу $x_1, \ldots, x_m$ этого подпространства и обозначим через W' m-мерное (вполне вырожденное) подпространство из V, порожденное независимыми прямыми $(Fx_1)', \ldots, (Fx_m)'$. Принимая во внимание 3.4, легко убедиться, что W' не зависит от выбора базы пространства W. Следовательно, автоморфизм Λ индуцирует отображение $W \longmapsto W'$ на множестве вполне вырожденных подпространств из V, причем оно сохраняет размерности и является биекцией. Очевидно, обратное отображение индуцировано автоморфизмом Λ^{-1} группы G.

Таким образом, биекция $W \longmapsto W'$ вполне вырожденных подпространств, индуцированная автоморфизмом Λ, удовлетворяет предположениям теоремы на стр. 132 из [3]. Применяя эту теорему, заключаем, что существует унитарный полулинейный изоморфизм g пространства V на себя, такой, что $gW = W'$ для всех вполне вырожденных подпространств W размерности $\nu(V) - 1$, принадлежащих V.

Пусть L — произвольная изотропная прямая из V. Выберем максимальное вполне вырожденное подпространство W из V, содержащее L. Тогда $L = \bigcap_{\alpha} W_\alpha$, где $\{W_\alpha\}$ — семейство всех подпространств из W размерности $\nu(V) - 1$, содержащих L. Отсюда $gL = \bigcap_{\alpha} gW_\alpha = \bigcap_{\alpha} W'_\alpha = L'$. Значит, $gL = L'$ для всех изотропных прямых L из V. Мы видим, что изоморфизм $\overline{\Lambda}_g^{-1} \circ \Lambda$ группы G в $\boldsymbol{PU}_n(V)$ удовлетворяет предположениям из 3.1. Значит, $\Lambda = \overline{\Lambda}_g$, и доказана

3.5. Теорема. *Допустим, что подгруппа G группы $\boldsymbol{PU}_n(V)$ имеет достаточно много проективных трансвекций, $\nu(V) \geqslant 3$, $\chi(F) \neq 2$. Пусть Λ — автоморфизм группы G. Тогда существует такой унитарный полулинейный изоморфизм g пространства V на себя, что $\Lambda = \overline{\Lambda}_g|_G$.*

3.5а. Следствие. *Пусть $\nu(V) \geqslant 3$, $\chi(F) \neq 2$ и S — подгруппа группы $\boldsymbol{U}_n(V)$, имеющая достаточно много трансвекций. Пусть Λ — автоморфизм группы S. Тогда существуют гомоморфизм χ группы S в центр группы $\boldsymbol{U}_n(V)$ и унитарный полулинейный изоморфизм g пространства V на себя, такие, что $\Lambda\sigma = \chi(\sigma) \cdot g\sigma g^{-1}$ для всех σ из S.*

Доказательство. Автоморфизм Λ индуцирует автоморфизм $\overline{\Lambda}$ группы $\overline{S}$ по правилу $\overline{\Lambda}(\bar{\sigma}) = \overline{\Lambda(\sigma)}$ для всех σ из S. По теореме 3.5 $\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_g$, т. е. $\overline{\Lambda\sigma} = \overline{\Lambda_g(\sigma)}$ для всех σ из S. Отсюда $\Lambda\sigma = \chi(\sigma) \cdot \Lambda_g(\sigma)$, где $\chi(\sigma)$ — скалярное преобразование из $\boldsymbol{U}_n(V)$. Так как Λ — автоморфизм, то χ является гомоморфизмом. Следствие доказано.

§ 4. Автоморфизмы унитарных конгруэнц-групп

Пусть $\mathfrak{o}$ — область целостности произвольной характеристики, а отображение $\alpha \mapsto \alpha^*$, $\alpha \in \mathfrak{o}$, — нетривиальный автоморфизм порядка 2 кольца $\mathfrak{o}$. Пусть F — поле частных для $\mathfrak{o}$. Автоморфизм * естественным образом продолжается до автоморфизма поля F, который мы снова обозначим *.

Пусть V есть n-мерное векторное пространство над F, (x, y) — невырожденная эрмитова форма на V со значениями в F. Пусть E — неподвижное поле автоморфизма *.

4.1. *Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — дробные идеалы области целостности $\mathfrak{o}$. Тогда в поле F найдется такой ненулевой элемент λ с нулевым следом, что $\lambda\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$.*

Доказательство. Достаточно доказать это в предположении, что $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{o}$. Пусть β — ненулевой элемент из $\mathfrak{b}$. Так как $\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}$, то $\beta\beta^* \in \mathfrak{b}$. Ясно, что в $\mathfrak{o}$ существует ненулевой элемент t с нулевым следом. В качестве искомого λ можно взять $\beta\beta^* t$.

Определение. $\mathfrak{o}$-модуль M называется *ограниченным*, если существует $\mathfrak{o}$-линейный изоморфизм модуля M в некоторый свободный $\mathfrak{o}$-модуль конечной размерности.

Пусть M — ограниченный $\mathfrak{o}$-модуль, содержащийся в V и такой, что $FM = V$, где $FM = \{\alpha x \mid \alpha \in F,\ x \in M\}$.

Для произвольного вектора $a \in V$ определим его коэффициент $\mathfrak{c}_a$ как множество всех $\alpha \in F$, таких, что $\alpha a \in M$. Очевидно, $\mathfrak{c}_a$ — дробный идеал кольца $\mathfrak{o}$. Если ρ — ненулевой линейный функционал на V, то $\rho(M)$ — дробный идеал кольца $\mathfrak{o}$.

Определим три унитарные группы $\boldsymbol{TL}_n(M)$, $\boldsymbol{U}_n^+(M)$, $\boldsymbol{U}_n(M)$ следующим образом:

$$\boldsymbol{U}_n(M) = \{\sigma \in \boldsymbol{U}_n(V) \mid \sigma M = M\}, \qquad \boldsymbol{U}_n^+(M) = \boldsymbol{U}_n(M) \cap \boldsymbol{SL}_n(V),$$

$\boldsymbol{TL}_n(M)$ — группа, порожденная всеми трансвекциями из $\boldsymbol{U}_n(M)$.

Пусть $\mathfrak{a}$ — ненулевой идеал кольца $\mathfrak{o}$. Положим

$$\mathfrak{a} \cdot M = \left\{\sum_i \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in \mathfrak{a},\ x_i \in M\right\}$$

и определим унитарные конгруэнц-группы

$$\boldsymbol{U}_n(M;\mathfrak{a}) = \{\sigma \in \boldsymbol{U}_n(M) \mid (\sigma - 1_V) M \subseteq \mathfrak{a}\cdot M\},$$

$$\boldsymbol{U}_n^+(M;\mathfrak{a}) = \boldsymbol{U}_n(M;\mathfrak{a}) \cap \boldsymbol{SL}_n(V),$$

$\boldsymbol{TL}_n(M;\mathfrak{a})$ — группа, порожденная всеми трансвекциями из $\boldsymbol{U}_n(M;\mathfrak{a})$.

Ясно, что $\boldsymbol{TL}_n(M;\mathfrak{a}) \subseteq \boldsymbol{U}_n^+(M;\mathfrak{a}) \subseteq \boldsymbol{U}_n(M;\mathfrak{a})$ — нормальные подгруппы группы $\boldsymbol{U}_n(M)$, $\boldsymbol{TL}_n(M;\mathfrak{o}) = \boldsymbol{TL}_n(M)$, $\boldsymbol{U}_n^+(M;\mathfrak{o}) = \boldsymbol{U}_n^+(M)$, $\boldsymbol{U}_n(M;\mathfrak{o}) = \boldsymbol{U}_n(M)$.

Проективные унитарные конгруэнц-группы

$$\boldsymbol{PTL}_n(M;\mathfrak{a}), \qquad \boldsymbol{PU}_n^+(M;\mathfrak{a}), \qquad \boldsymbol{PU}_n(M;\mathfrak{a})$$

определяются как образы групп $\boldsymbol{TL}_n(M;\mathfrak{a})$, $\boldsymbol{U}_n^+(M;\mathfrak{a})$, $\boldsymbol{U}_n(M;\mathfrak{a})$ соответственно при отображении $^-$ группы $\boldsymbol{U}_n(V)$ на ее факторгруппу по центру.

Если $\tau_{a,\lambda} \in \boldsymbol{U}_n(V)$, то легко видеть, что

$$\lambda(M, a) \subseteq \mathfrak{c}_a \cdot \mathfrak{a} \Rightarrow \lambda(M, a)\, a \subseteq \mathfrak{a}\cdot M \Rightarrow \tau_{a,\lambda} \in \boldsymbol{TL}_n(M;\mathfrak{a}).$$

4.2. *При* $n \geqslant 2$ *группа* $\boldsymbol{TL}_n(M;\mathfrak{a})$ *имеет достаточно много трансвекций.*

Доказательство. Пусть $L = Fa$ — изотропная прямая пространства V. Отображение $x \longmapsto (x, a)$, $x \in V$, — ненулевой линейный функционал на V, поэтому (M, a) — дробный идеал кольца $\mathfrak{o}$. Используя 4.1, выберем в F ненулевой элемент λ с нулевым следом, такой, что $\lambda(M, \mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{c}_a \cdot \mathfrak{a}$. Поскольку след λ равен нулю, то $\tau_{a,\lambda} \in \boldsymbol{U}_n(V)$. Сделанные выше замечания показывают, что $\tau_{a,\lambda} \in \boldsymbol{TL}_n(M;\mathfrak{a})$.

4.3. *Пусть* $\nu(V) \geqslant 3$, $\chi(F) \neq 2$, G — *одна из групп*

$$\boldsymbol{PU}_n(M;\mathfrak{a}), \qquad \boldsymbol{PU}_n^+(M;\mathfrak{a}), \qquad \boldsymbol{PTL}_n(M;\mathfrak{a}).$$

Для всякого автоморфизма Λ *группы* G *существует такой унитарный полулинейный изоморфизм* g *пространства* V *на себя, что* $\Lambda = \overline{\Lambda}_g|_G$.

Доказательство. Из 4.2 следует, что G имеет достаточно много проективных трансвекций. Применив теорему 3.5, получим требуемое.

4.4. Теорема. *Пусть* $\nu(V) \geqslant 3$, $\chi(F) \neq 2$ *и* S — *одна из унитарных конгруэнц-групп*

$$\boldsymbol{U}_n(M;\mathfrak{a}), \qquad \boldsymbol{U}_n^+(M;\mathfrak{a}), \qquad \boldsymbol{TL}_n(M;\mathfrak{a}).$$

Пусть Λ — *автоморфизм группы* S. *Тогда существуют гомоморфизм* χ *группы* S *в* $\boldsymbol{RL}(V) \cap \boldsymbol{U}_n(V)$ *и унитарный полулинейный изоморфизм* g *пространства* V *на себя, такие, что* $\Lambda\sigma = \chi(\sigma) \cdot \Lambda_g(\sigma)$ *для всех* $\sigma \in S$.

Доказательство. Применить 3.5а и 4.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. H. Biggs, Automorphisms of projective unitary groups, Thesis, University of Illinois, 1966.
2. J. Dieudonné, On the automorphisms of the classical groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, № 2 (1951), 1—95.
3. J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, Springer-Verlag, Berlin, 1971. [Русский перевод: Ж. Дьёдонне, Геометрия классических групп, «Мир», М., 1973.]
4. M. Harty, Automorphisms of the 4-dimensional unimodular unitary group, Thesis, University of Illinois, 1967.
5. A. A. Johnson, The automorphisms of unitary groups over a field of characteristic 2, *Amer. J. Math.*, **93**, № 2 (1971), 367—384. [Русский перевод: см. наст. сборник, стр. 7—30.]
6. O. T. O'Meara, Group-theoretic characterization of transvections using CDC, *Math. Z.*, **110**, № 5 (1969), 385—394.
7. C. E. Rickart, Isomorphic groups of linear transformations, II, *Amer. J. Math.*, **73**, № 3 (1951), 697—716.
8. R. E. Sollazzi, The automorphisms of the symplectic congruence groups, *J. Algebra*, **21**, № 1 (1972), 91—102.) [Русский перевод: см. наст. сборник, стр. 188—201.]
9. E. Spiegel, On the automorphisms of the unitary group over a field of characteristic 2, *Amer. J. Math.*, **89**, № 1 (1967), 43—50.
10. E. Spiegel, On the automorphisms of the projective unitary group over a field of characteristic 2, *Amer. J. Math.*, **89**, № 1 (1967), 51—55.
11. E. Spiegel, Automorphisms of unitary groups, *J. Algebra*, **19**, № 4 (1971), 541—546.
12. J. H. Walter, Isomorphism between projective unitary groups, *Amer. J. Math.*, **77**, № 4 (1955), 805—844.
13. M. J. Wonenburger, The automorphisms of $U_n^+(k,f)$ and $PU_n^+(k,f)$, *Rew. Math. Hisp.-Amer.*, **24**, (1964), 52—65.

АБСТРАКТНЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ И АВТОМОРФИЗМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И АРИФМЕТИЧЕСКИХ ГРУПП [1])

Ж. Титс

1. В 1928 г. Шрайер и ван дер Варден описали все автоморфизмы проективной специальной (или, иначе, унимодулярной) группы $\boldsymbol{PSL}_n(K)$ над полем K и показали, что из изоморфизма $\boldsymbol{PSL}_n(K) \simeq \boldsymbol{PSL}_{n'}(K')$ вытекают соотношения $n = n'$, $K \simeq K'$ за исключением двух случаев: $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \simeq \boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ и $\boldsymbol{PSL}_2(\mathbb{F}_7) \simeq \boldsymbol{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$. В дальнейшем изучению автоморфизмов классических групп и изоморфизмов между классическими группами „различного происхождения" были посвящены многочисленные работы (Дьёдонне и других). Состояние вопроса на 1963 г. изложено в четвертой главе книги [8]. С тех пор был достигнут новый прогресс и поле исследований расширилось, особенно за счет рассмотрения более общих основных колец (вместо тел), перехода от классических групп к простым алгебраическим группам (и поиска общих доказательств, не опирающихся на классификацию), а также за счет изучения гомоморфизмов, не обязательно сюръективных. Цель настоящего доклада — изложить основные результаты, полученные в этих направлениях.

2. Указанные проблемы уместно рассматривать в свете одного результата Фройденталя, установившего в 1941 г. [11], что топология абсолютно простой (т. е. простой, у которой алгебра Ли остается простой при тензорном умножении на $\mathbb{C}$) группы Ли полностью определяется ее строением как абстрактной группы (для компактного случая см. также [5, 29]). Аналогичный вопрос, естественно возникающий в случае алгебраической группы $\mathfrak{G}$, — скажем, над полем K — состоит в том, чтобы выяснить, хранит ли в себе группа $\mathfrak{G}(K)$ точек группы $\mathfrak{G}$, рациональных над K, информацию о поле K и о структуре алгебраического множества $\mathfrak{G}$ или, говоря точнее, всякий ли изоморфизм (иногда подчиненный определенным условиям) α: $\mathfrak{G}(K) \to \mathfrak{G}'(K')$ группы $\mathfrak{G}(K)$ на группу той же природы индуцируется некоторым изоморфизмом

---

[1]) J. Tits, Homomorphismes et automorphismes „abstraits" de groupes algébriques et arithmétiques, Actes Congrès intern. Math., 1970, Tome 2, Paris, 1971, 349—355.

полей $\sigma\colon K \to K'$ и некоторым K-изоморфизмом алгебраических групп $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'$, если K' отождествить с K при помощи σ.

3. Уточним и обобщим последнее высказывание. Пусть K, K' — два поля, ${}_K\mathfrak{G}$ (соотв. ${}_{K'}\mathfrak{G}'$) — групповая схема над K (соотв. K') и H (соотв. H') — подгруппа из ${}_K\mathfrak{G}(K)$ (соотв. ${}_{K'}\mathfrak{G}'(K')$). Для произвольного гомоморфизма полей $\sigma\colon K \to K'$ обозначим через ${}^{\sigma}_{K}\mathfrak{G}$ групповую схему над K', получаемую из ${}_K\mathfrak{G}$ заменой поля с помощью σ, а через σ_* — канонический гомоморфизм ${}_K\mathfrak{G}(K) \to {}^{\sigma}_{K}\mathfrak{G}(K')$. Допуская некоторую вольность речи, будем говорить, что гомоморфизм $\alpha\colon H \to H'$ является *полуалгебраическим*, если существуют такой гомоморфизм σ и такой K'-гомоморфизм $\varphi\colon {}^{\sigma}_{K}\mathfrak{G} \to {}_{K'}\mathfrak{G}'$, что

$$\alpha = \varphi(K') \circ \sigma_* |_H \qquad (1)$$

(разумеется, это понятие зависит от заданных K, K', ${}_K\mathfrak{G}$, ${}_{K'}\mathfrak{G}'$ и вложений $H \subset {}_K\mathfrak{G}(K)$ и $H' \subset {}_{K'}\mathfrak{G}'(K')$). Основное содержание почти всех результатов, составляющих предмет данного доклада, укладывается в следующую схему: рассматриваются определенные типы полупростых групповых схем (см. в связи с этим п. 11) и определенные типы подгрупп H, H' и устанавливается, что для всякого абстрактного гомоморфизма $\beta\colon H \to H'$ (иногда при некоторых дополнительных ограничениях)

(*) *существуют единственный полуалгебраический гомоморфизм $\alpha\colon H \to H'$ и единственный гомоморфизм χ группы H в центр группы H', такие, что $\beta(h) = \alpha(h) \cdot \chi(h)$ для всех $h \in H$.*

Это утверждение — если оно верно — еще не дает полного решения проблемы описания гомоморфизмов β, так как нужно еще определить для каждого $\sigma\colon K \to K'$ алгебраические гомоморфизмы $\varphi\colon {}^{\sigma}_{K}\mathfrak{G} \to {}_{K'}\mathfrak{G}'$ и выделить из них те, для которых гомоморфизм α, определенный формулой (1), отображает H в H'. Указанные вопросы, не всегда легкие, решены удовлетворительно в большинстве случаев, когда можно установить (*). Однако мы оставим в стороне как этот, так и некоторые другие аспекты — например, вопрос об уточнениях, которые можно сделать относительно α и χ, если предположить, что β — изоморфизм, или вопрос о том, в какой мере α определяет σ и φ. По поводу последнего заметим только, что если K' — совершенное поле характеристики $p \neq 0$, то α не изменится, если заменить σ и φ соответственно на $\sigma'\colon x \mapsto \sigma(x)^{\frac{1}{p}}$ и $\varphi \circ \mathrm{Fr}$, где $\mathrm{Fr}\colon {}^{\sigma'}_{K}\mathfrak{G} \to {}^{\sigma}_{K}\mathfrak{G}$ обозначает морфизм Фробениуса.

4. В работах, обсуждаемых в пп. 5—7, фигурируют *основные кольца*: задаются области целостности R, R' с полями частных K, K' и групповые схемы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ над R, R', которые превращаются в ${}_K\mathfrak{G}$, ${}_{K'}\mathfrak{G}'$ расширением поля скаляров, и предполагается, что $H \subset \mathfrak{G}(R)$, $H' \subset \mathfrak{G}'(R')$ (исключая, однако, ситуацию в 7.1). Будем говорить, что гомоморфизм α: $H \to H'$ является *полуцелым*, если существуют σ: $R \to R'$ и φ: ${}^{\sigma}\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'$, такие, что выполняется (1). В ряде случаев — например, в п. 5 (ср. [13, 14]) и в 7.2 (ср. [2], теорема 4.3) — можно уточнить утверждение (*), заменив „полуалгебраический“ на „полуцелый“.

Произвольные области целостности

5. Пусть $R = R'$ — произвольная область целостности. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$ — общая линейная группа (групповая схема) $\boldsymbol{GL}$ или специальная линейная группа $\boldsymbol{SL}$ свободного R-модуля конечного ранга $\geqslant 3$, или симплектическая группа $\boldsymbol{Sp}$ свободного модуля конечного четного ранга $\geqslant 4$ со *стандартной* знакопеременной формой, и пусть $H = H'$ — либо сама группа $\mathfrak{G}(R)$, либо ее подгруппа $T\mathfrak{G}(R)$, порожденная трансвекциями. Тогда [13, 14, 17] *каждый автоморфизм* β *группы* H *обладает свойством* (*).

Автор информирован о том, что О'Мира и его ученики обобщили этот результат в различных направлениях: перешли от свободных модулей к произвольным ограниченным модулям, т. е. подмодулям свободных модулей конечного типа (по поводу групп $\boldsymbol{GL}$ и $\boldsymbol{SL}$ над дедекиндовыми областями см. также [13]), распространили результат на другие групповые схемы $\mathfrak{G}$ ($\boldsymbol{PGL}$, $\boldsymbol{PSL}$, $\boldsymbol{PSp}$) и на конгруэнц-подгруппы H (для случая дедекиндовых областей см. также [18]), исследовали для некоторых типов групп изоморфизмы (вместо автоморфизмов).

Локальные кольца и арифметические кольца

6. Пусть R — область целостности характеристики $\neq 2$, K — ее поле частных. Предположим, что выполняется одно из следующих условий:

(G) K — глобальное поле (конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ или поля $\mathbb{F}_p(t)$), S — конечное множество плейсов поля K, содержащее все архимедовы плейсы, R — пересечение колец нормирования плейсов, не принадлежащих S;

(L) R — локальное кольцо.

Пусть M — ограниченный (см. п. 5) R-модуль ранга $n \geqslant 7$, $n \neq 8$, снабженный невырожденной квадратичной формой Q,

т. е. сужением невырожденной квадратичной формы на векторном пространстве $M \otimes K$. Пусть $\mathfrak{G}$ — ортогональная группа $\boldsymbol{O}(M, Q)$ [1]) и H — подгруппа из $\mathfrak{G}(R)$, содержащая -1 и некоторую конгруэнц-группу (группу элементов из $\mathfrak{G}(R)$, сравнимых с 1 по модулю заданного ненулевого идеала из R). Основной результат работы [16] гласит:

при некоторых дополнительных предположениях (заведомо выполняющихся, например, в случаях (G) *и* (L)), *если K — поле алгебраических чисел, не являющееся вполне вещественным, то всякий автоморфизм β группы H обладает свойством* (*).

7. В этом пункте излагаются некоторые результаты работы [2]. Пусть $K = K'$ — конечное алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}$; S, R имеют то же значение, что и в п. 6 (G), $R' = R$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ — связные полупростые групповые R-схемы, почти простые над K, и r обозначает K-ранг группы $\mathfrak{G}$. В 7.1 и 7.2 предполагается, что $\mathfrak{G}$ односвязна или $\mathfrak{G}'$ — присоединенная группа.

7.1. Пусть $K = \mathbb{Q}$, $R = \mathbb{Z}$ и $\mathfrak{G}(\mathbb{Z}) \subset H \subset \mathfrak{G}(\mathbb{Q})$. Тогда *при $r \geqslant 2$ всякий гомоморфизм β: $H \to H' = \mathfrak{G}'(\mathbb{Q})$, для которого $\beta(\mathfrak{G}(\mathbb{Z}))$ плотно по Зарисскому в $\mathfrak{G}'$, обладает свойством* (*).

7.2. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$ — схема Шевалле. Предположим, что $r \geqslant 2$ или $\operatorname{card} S \geqslant 2$. Тогда *всякий автоморфизм β группы $H = \mathfrak{G}(R)$ обладает свойством* (*). (Теорема 4.3 из [2] дает более точное описание этих автоморфизмов.)

7.3. Пусть $R = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$. *Если алгебра Ли группы $\mathfrak{G}(\mathbb{R})$ не имеет фактора, изоморфного $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, то группа* $\operatorname{Aut} \mathfrak{G}(\mathbb{Z}) / \operatorname{Int} \mathfrak{G}(\mathbb{Z})$ *конечна*. (См. теорему 1.5 (ii) в [2] — впрочем, несколько более общую.)

Поля

8. Пусть K — поле характеристики $\neq 2$, не изоморфное $\mathbb{F}_3$, V — векторное пространство над K размерности $n \geqslant 7$, $n \neq 8$, снабженное невырожденной квадратичной формой Q, $\mathfrak{G}$ — ортогональная группа $\boldsymbol{O}(Q)$ и $H \subset \mathfrak{G}(K)$ — подгруппа, являющаяся либо ядром спинорной нормы (в $\boldsymbol{O}^+(Q, K)$), либо коммутантом группы $\mathfrak{G}(K)$. Тогда [15] *всякий автоморфизм β группы H*

---

[1]) В случае (L) $\mathfrak{G}$ — не обязательно групповая схема, но во всяком случае R-функторная группа в смысле [9].

обладает свойством (*). (По поводу других, более старых результатов о классических группах и, в частности, об ортогональных группах $\mathfrak{G}(K)$ см. [8].)

9. В этом пункте K и K' — поля, $\mathfrak{G}$ (соотв. $\mathfrak{G}'$) — абсолютно почти простая алгебраическая группа, определенная над K (соотв. K'), G^+ — подгруппа из $\mathfrak{G}(K)$, порожденная подгруппами вида $\mathfrak{A}(K)$, где $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ K-изоморфна аддитивной группе, и H — подгруппа из $\mathfrak{G}(K)$, содержащая G^+. Предположим, что $\mathfrak{G}$ односвязна или $\mathfrak{G}'$ — присоединенная группа.

9.1. *Всякий гомоморфизм* β: $H \to \mathfrak{G}'(K')$, *такой, что* $\beta(G^+)$ *плотно по Зарисскому в* $\mathfrak{G}'$, *обладает свойством* (*) [3, 4]. Заметим, что из существования β следует, что K бесконечно, а группа $\mathfrak{G}$ изотропна над K $(G^+ \neq \{1\})$; в частности, этот результат не дает ни результатов Картана [5] и ван дер Вардена [29] о компактных группах (см. п. 2), ни результатов об ортогональных и унитарных группах (см., например, п. 8), когда рассматриваемые квадратичные и эрмитовы формы анизотропны.

9.2. Предположим, что поля K и K' конечны, но не изоморфны $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_3$, а гомоморфизм β: $H \to \mathfrak{G}(K')$ таков, что $\beta(H)$ содержит коммутант группы $\mathfrak{G}'(K')$. Тогда β *обладает свойством* (*) *или же* K, K' *изоморфны соответственно полям* $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_5$, *а* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ *имеют тип* A_1 (*изоморфны группам* $\boldsymbol{SL}_2$ *или* $\boldsymbol{PSL}_2$). Это непосредственно следует из результатов работ [1] (надлежащим образом дополненных, см., например, [27], 4.5) и [24]. Если допустить к рассмотрению поля $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_3$, то добавляются еще некоторые хорошо известные исключения (см., например, [1] или [27], таблица 4).

Дополнение: обобщение основной теоремы проективной геометрии

10. Для $i=1$, 2 пусть K_i обозначает поле, $\mathfrak{G}_i$ — алгебраическую абсолютно простую присоединенную группу, определенную над K_i и имеющую K_i-ранг $\geqslant 2$, P_i — множество параболических K_i-подгрупп группы $\mathfrak{G}_i$, упорядоченное по включению. Тогда ([28], теорема 5.8) *для каждого изоморфизма упорядоченных множеств* π: $P_1 \to P_2$ *существуют изоморфизм* σ: $K_1 \to K_2$ *и изогения* φ: ${}^{\sigma}\mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$, *индуцирующие* π; *изогения* φ *является изоморфизмом, за исключением, быть может, случая, когда* K — *совершенное поле характеристики* 2, *а* $\mathfrak{G}_i$ *имеет тип* B_n, C_n *или* F_4, *или же когда*

K — совершенное поле характеристики 3, *а* $\mathfrak{G}_i$ *имеет тип* G_2. Этот результат обобщает также одну хорошо известную теорему Чжоу (см. [8], гл. III, § 4).

Не полупростые группы: примеры

11. Все алгебраические группы, рассматриваемые выше, предполагались полупростыми. Проиллюстрируем примерами некоторые явления, происходящие при отказе от этого предположения. Как и в п. 9, $\mathfrak{G}$ (соотв. $\mathfrak{G}'$) обозначает алгебраическую группу, определенную над полем K (соотв. K').

11.1. Пусть $K = K' = \mathbb{R}$ и $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$ — аддитивная группа. Группа $\mathfrak{G}(\mathbb{R})$ (являющаяся векторным пространством размерности $2^{\aleph_0}$ над $\mathbb{Q}$) обладает $2^{2^{\aleph_0}}$ эндоморфизмами. Из них только эндоморфизмы вида $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{R}$, полуалгебраические.

11.2. Пусть $\mathfrak{G}$ (соотв. $\mathfrak{G}'$) — группа над K (соотв. K'), равная полупрямому произведению мультипликативной группы на аддитивную группу с обычным действием первой на второй (группа аффинных преобразований $x \mapsto ax + b$). Легко видеть, что всякий инъективный гомоморфизм группы $\mathfrak{G}(K)$ в $\mathfrak{G}'(K')$ полуалгебраичен.

11.3. Пусть $K = K'$ и $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' = \boldsymbol{GL}_n \cdot \boldsymbol{M}_n$ — полупрямое произведение группы $\boldsymbol{GL}_n$ на (алгебраическую) аддитивную группу $\boldsymbol{M}_n$ квадратных матриц порядка n, на которой $\boldsymbol{GL}_n$ действует сопряжениями. Тогда в обычных обозначениях $\mathfrak{G}(K) = \boldsymbol{GL}_n(K) \cdot \boldsymbol{M}_n(K)$. Пусть d — дифференцирование поля K. Легко проверить, что отображение β: $\mathfrak{G}(K) \to \mathfrak{G}(K)$, определяемое формулой

$$\beta(x, y) = (x, x^{-1}dx + y),$$

есть гомоморфизм, который обладает свойством (*) только при $d = 0$. Заметим, что если $K = \mathbb{R}$ и $d \neq 0$, то сужение β на подгруппу $\boldsymbol{GL}_n(\mathbb{R})$ является „разрывным сечением Леви“ группы Ли $\mathfrak{G}(\mathbb{R})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Эта библиография, составленная на основе очень полного списка, любезно предоставленного автору О'Мирой, охватывает в основном период с 1966 по 1970 г. По поводу более ранних публикаций см. библиографию в работах [8] (особенно к гл. IV) и [13]; мы довольствуемся здесь упоминанием отдельных статей, которые там не фигурируют.

1. E. Artin, The orders of the classical simple groups, *Comm. Pure Appl. Math.*, 8, № 4 (1955), 455—472.

2. A. Borel, On the automorphisms of certain subgroups of semisimple Lie groups, Proc. Bombay Colloquium on Algebraic Geometry, 1968, 43—73.

3. A. Borel, J. Tits, On «abstract» homomorphisms of simple algebraic groups, Proc. Bombay Colloquium on Algebraic Geometry, 1968, 75—82.

4. A. Borel, J. Tits, Homomorphismes «abstraits» de groupes algébriques semi-simples, *Ann. Math.*, **97**, № 3 (1973), 499—571.

5. E. Cartan, Sur les représentations linéaires des groupes clos, *Comm. Math. Helv.*, **2**, № 4 (1930), 269—283.

6. P. M. Cohn, On the structure of the GL_2 of a ring, *Publs math. IHES*, № 30 (1966), 5—53. [Русский перевод: см. наст. сборник, стр. 31—56.]

7. P. M. Cohn, Automorphisms of two-dimensional linear groups over Euclidean domains, *J. Lond. Math. Soc.*, **1**, № 2 (1969), 279—292.

8. J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963. [Русский перевод: Ж. Дьёдонне, Геометрия классических групп, «Мир», М., 1974.]

9. M. Demazure, P. Gabriel, Groupes algébriques, I, Masson, Paris, 1970.

10. M. H. Dull, On the automorphisms of the two-dimensional linear groups over integral domains, University of Notre Dame thesis, 1969.

11. H. Freudenthal, Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen, I, *Ann. Math.*, **42** (1941), 1051—1074. Erratum, ibid., **47** (1946), 829—830.

12. J. E. Humphreys, On the automorphisms of infinite Chevalley groups, *Canad. J. Math.*, **21**, № 4 (1969), 908—911.

13. O. T. O'Meara, The automorphisms of the linear groups over any integral domain, *J. reine angew. Math.*, **223** (1966), 56—100.

14. O. T. O'Meara, The automorphisms of the standard symplectic group over any integral domain, *J. reine angew. Math.*, **230** (1968), 104—138.

15. O. T. O'Meara, The automorphisms of the orthogonal groups $\Omega_n(V)$ over fields, *Amer J. Math.*, **90**, № 4 (1968), 1260—1306.

16. O. T. O'Meara, The automorphisms of the orthogonal groups and their congruence subgroups over arithmetic domains, *J. reine angew. Math.*, **238** (1969), 169—206.

17. O. T. O'Meara, Group-theoretic characterization of transvections using *CDC*, *Math. Z.*, **110**, № 5 (1969), 385—394.

18. O. T. O'Meara, H. Zassenhaus, The automorphisms of the linear congruence groups over Dedekind domains, *J. Number Theory*, **1**, № 2 (1969), 211—221.

19. I. Reiner, Automorphisms of the symplectic modular group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80**, № 1 (1955), 35—50.

20. R. E. Solazzi, The automorphisms of certain subgroups of $PLG_n(V)$, University of Notre Dame thesis, 1969.

21. R. E. Solazzi, The automorphisms of the symplectic congruence groups, preprint.

22. E. Spiegel, On the automorphisms of the unitary group over a field of characteristic 2, *Amer. J. Math.*, **89**, № 1 (1967), 43—50.

23. E. Spiegel, On the automorphisms of the projective unitary group over a field of characteristic 2, *Amer. J. Math.*, **89**, № 1 (1967), 51—55.

24. R. Steinberg, Automorphisms of finite linear groups, *Canad. J. Math.*, **12**, № 4 (1960), 606—615.

25. R. Steinberg, Representations of algebraic groups, *Nagoya Math. J.*, **22** (1963), 33—56.

26. R. Steinberg, Lectures on Chevalley groups, Yale Univ. Lecture notes, 1967. [Русский перевод: Р. Стейнберг, Лекции о группах Шевалле, «Мир», М., 1975.]

27. J. Tits, Groupes simples et géométries associées, Proc. Intern. Congress Math., Stockholm, 1962, 197—221.

28. J. Tits, Buildings of spherical types and finite BN-pairs, Lect. Notes Math., **386**, Springer-Verlag, 1974.

29. B. L. van der Waerden, Stetigkeitssätze für halb-einfache Liesche Gruppen, *Math. Z.*, **36** (1933), 780—786.

30. M. J. Wonenburger, The automorphisms of the group of rotations and its projective group corresponding to quadratic forms of any index, *Canad. J. Math.*, **15**, № 2 (1963), 302—303.

31. M. J. Wonenburger, The automorphisms of $U_n^+(k, f)$ and $PU_n^+(k, f)$, *Rev. Mat. Hisp.-Amer.*, **24**, № 1—2 (1964), 52—65.

32. C. H. Xu, On the automorphisms of orthogonal groups over perfect fields of characteristic 2, *Chinese Math.*, **8**, № 4 (1966), 475—523.

33. H. Zassenhaus, Characterization of unipotent matrices, *J. Number* Theory, **1**, № 2 (1969), 222—230.

$^1/_2$8 Зак. 154

ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ НАД КОЛЬЦОМ [1])

Янь Ши-цзянь

§ 1. Введение

Строение линейных групп над полем и их автоморфизмы хорошо изучены (см. [1, 2]). Автоморфизмы линейных групп над кольцом целых чисел исследовали Хуа Ло-ген и Райнер [3]. Автоморфизмы общих линейных групп над некоммутативной областью главных идеалов описали Вань Чже-сянь [4] и Лэндин и Райнер [5]. Кроме того, в [4] исследованы автоморфизмы специальных линейных групп над некоммутативным евклидовым кольцом. В настоящей работе изучаются автоморфизмы и строение линейных групп над произвольным кольцом.

Пусть R — кольцо. *Специальная линейная группа* $\boldsymbol{SL}_n(R)$ степени n над R определяется как группа, порожденная всеми матрицами вида

$$B_{ij}(\lambda)=I+\lambda E_{ij}, \quad i\neq j, \quad 1\leqslant i, \quad j\leqslant n, \quad \lambda\in R,$$

где $I=I^{(n)}$ — единичная матрица порядка n, E_{ij} — матрица порядка n, содержащая 1 на месте (i, j) и 0 на остальных местах [2]). *Общая линейная группа* $\boldsymbol{GL}_n(R)$ степени n над R определяется как группа всех обратимых матриц порядка n над R. В настоящей статье мы докажем, что если R — коммутативная область целостности характеристики $\neq 2$ и $n\geqslant 3$, то для всякого изоморфного отображения $\mathscr{A}$ группы $\boldsymbol{SL}_n(R)$ в $\boldsymbol{GL}_n(R)$ либо

$$P\mathscr{A}(X)=X^{\sigma}P \quad \text{для всех} \quad X\in\boldsymbol{SL}_n(R), \qquad (1.1)$$

либо

$$P\mathscr{A}(X)=\left[(X^{\sigma})'\right]^{-1}P \quad \text{для всех} \quad X\in\boldsymbol{SL}_n(R), \qquad (1.2)$$

---

[1]) Yan Shi-jian, Linear groups over a ring, *Chinese Math.*, 7, № 2 (1965), 163—179.

[2]) Подчеркнем, что терминология отличается от общепринятой: $\boldsymbol{SL}_n$ обозначает у Янь Ши-цзяня группу, которая чаще обозначается $\boldsymbol{EL}_n$, а обычная группа $\boldsymbol{SL}_n$ (состоящая из матриц с определителем 1) обозначается у него далее через $\boldsymbol{L}_n$. — *Прим. ред.*

где σ — изоморфизм кольца R в себя, а матрица $P=(a_{ij})$, $a_{ij}\in R$, удовлетворяет следующему условию:

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n})=(a_{i1}, \ldots, a_{in}), \quad 1\leqslant i\leqslant n, \\ (a_{11}, \ldots, a_{1n})^n=(|P|). \tag{1.3}$$

Здесь $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ обозначает идеал, порожденный элементами $a_{i1}, \ldots, a_{in}$. Обратно, отображения, определенные формулами (1.1) и (1.2), являются изоморфизмами группы $\boldsymbol{SL}_n(R)$ в $\boldsymbol{GL}_n(R)$. Используя этот результат, Вань Чже-сянь описал автоморфизмы общей линейной группы над дедекиндовым кольцом характеристики $\neq 2$, а также автоморфизмы ее подгруппы матриц с определителем 1 [1]).

Определим $\boldsymbol{L}_n(R)$ как подгруппу группы $\boldsymbol{GL}_n(R)$, состоящую из матриц с определителем 1, и пусть $\boldsymbol{T}_n(R)$ обозначает группу, порожденную всеми матрицами $T_{ij}(\lambda; P)$ порядка n, удовлетворяющими соотношениям

$$PT_{ij}(\lambda; P)=B_{ij}(\lambda)P, \quad i\neq j, \quad 1\leqslant i, j\leqslant n, \quad \lambda\in R,$$

где P удовлетворяет условию (1.3). Используя приведенный выше результат, можно доказать, что если R — коммутативная область целостности характеристики $\neq 2$, то $\boldsymbol{T}_n(R)$ — автоморфно допустимая подгруппа групп $\boldsymbol{L}_n(R)$ и $\boldsymbol{GL}_n(R)$.

В настоящей статье для областей главных идеалов — не обязательно коммутативных — будут получены два результата, аналогичные указанным выше. Результат, соответствующий второму из них, является новым, а результат, соответствующий первому, был получен ранее Вань Чже-сянем [4] и Лэндином и Райнером [5].

Наконец, автор хотел бы отметить, что все результаты этой статьи можно усилить параллельно результатам, полученным автором ранее в [7] для линейных групп над кольцом целых чисел. Аналогичными методами можно исследовать также симплектическую группу над коммутативной областью целостности (см. [8]).

Настоящая работа выполнена под руководством профессора Хуа Ло-гена, которому автор выражает свою благодарность.

§ 2. Теорема о „внутреннем“ изоморфизме и некоторые элементарные применения

Основная цель этого параграфа — доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть R — коммутативная область целостности. Если P — невырожденная матрица порядка n над R и*

[1]) Доказательство см. в [6].

для всякого E_{ij}, $i \neq j$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$, существует матрица X_{ij} порядка n над R, такая, что

$$PX_{ij} = E_{ij}P, \tag{2.1}$$

то P удовлетворяет условию (1.3). Обратно, если P удовлетворяет условию (1.3), то для всякой матрицы X порядка n над R существуют матрицы Y и Z порядка n, такие, что

$$PX = YP, \quad XP = PZ. \tag{2.2}$$

Доказательство. а) Пусть $P = (a_{ij})$, $X_{ij} = (x_{kl})$. Ввиду (2.1)

$$a_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} x_{lk}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

откуда $(a_{j1}, \ldots, a_{jn}) \subseteq (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $i \neq j$. Следовательно

$$(a_{11}, \ldots. a_{1n}) = (a_{i1}, \ldots, a_{in}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Пусть, далее, $K(R)$ обозначает поле частных кольца R. Снова ввиду (2.1)

$$X_{ij} = \frac{1}{|P|}(A_{kl})' E_{ij}(a_{kl}) = \left(\frac{A_{ik}a_{jl}}{|P|}\right), \quad i \neq j, \ 1 \leqslant i, \ j \leqslant n.$$

Так как X_{ij} — матрица над R, то

$$A_{ik}a_{jl} \in (|P|), \quad i \neq j, \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n, \quad 1 \leqslant k, \ l \leqslant n. \tag{2.4}$$

Из (2.3) видно, что $A_{ik}a_{il} \in (|P|)$, и, следовательно, P удовлетворяет условиям (2.3) и (2.4) (включая случай $i = j$).

б) Предположим, что P удовлетворяет условиям (2.3) и (2.4). Тогда для любой матрицы $X = (x_{ij})$ порядка n над R имеем

$$PXP^{-1} = \left(\sum_{k, l=1}^{n} \frac{a_{ik}x_{kl}A_{jl}}{|P|}\right).$$

Из (2.4) следует, что PXP^{-1} — матрица над R и аналогично $P^{-1}XP$ — также матрица над R.

в) Покажем теперь, что (2.3) и (2.4) в совокупности равносильны условию (1.3). Очевидно, (2.3) и (2.4) непосредственно следуют из (1.3). Обратно, если (2.3) и (2.4) выполняются, то из (2.4) следует, что

$$(|P|) \supseteq (A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{nn})(a_{11}, \ldots, a_{1n}).$$

Отсюда и из теоремы об определителях

$$(|P|)^n \supseteq (A_{11}, \ldots, A_{nn})^n (a_{11}, \ldots, a_{1n})^n \supseteq$$
$$\supseteq (|A_{ij}|)(a_{11}, \ldots, a_{1n})^n =$$
$$= (|P|^{n-1})(a_{11}, \ldots, a_{1n})^n = (|P|)^{n-1}(a_{11}, \ldots, a_{1n})^n.$$

С другой стороны,

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n})^n = (a_{11}, \ldots, a_{1n}) \ldots (a_{n1}, \ldots, a_{nn}) \supseteq (|P|),$$

и, значит,

$$(|P|)^n = (|P|)^{n-1}(a_{11}, \ldots. a_{1n})^n.$$

Следовательно, $(|P|) = (a_{11}, \ldots, a_{1n})^n$, и теорема доказана.

Следствие 1. *Множество всех невырожденных матриц порядка n над R, удовлетворяющих условию* (1.3), *является полугруппой относительно матричного умножения.*

Многие вопросы, касающиеся матриц над R, можно изучать над полем частных кольца R, и теорема 1 обеспечивает нам обратный переход. Например, справедлива

Теорема 2. *Пусть R — коммутативная область целостности, $\mathbf{M}_n(R)$ — кольцо всех матриц порядка n над R. Всякий автоморфизм $\mathscr{A}$ кольца $\mathbf{M}_n(R)$ может быть записан в виде*

$$P\mathscr{A}(X) = X^{\sigma}P, \quad X \in \mathbf{M}_n(R), \tag{2.5}$$

где P — матрица, удовлетворяющая (1.3), *σ — автоморфизм кольца R. Обратно, отображение, определенное формулой* (2.5), *является автоморфизмом кольца $\mathbf{M}_n(R)$.*

Доказательство. Пусть $K(R)$ — поле частных кольца R. Так как $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, то

$$\mathscr{A}(E_{ij})\mathscr{A}(E_{kl}) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq j, \\ \mathscr{A}(E_{il}) & \text{при} \quad k = j. \end{cases}$$

По хорошо известной теореме существует невырожденная матрица Q порядка n над $K(R)$, такая, что

$$\mathscr{A}(E_{ij}) = Q^{-1}E_{ij}Q, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{2.6}$$

Более того, можно выбрать элемент $a \neq 0$ в R так, что $aQ = P$ будет матрицей порядка n над R. Тогда ввиду (2.6)

$$P\mathscr{A}(E_{ij}) = E_{ij}P, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{2.7}$$

Из теоремы 1 видно, что P удовлетворяет условию (1.3).

Теперь рассмотрим $\mathscr{A}(\lambda E_{ij})$, $\lambda \in R$. Так как $\mathscr{A}(\lambda E_{ij}) = \mathscr{A}(E_{ii})\mathscr{A}(\lambda E_{ij})\mathscr{A}(E_{jj})$, то ввиду (2.7)

$$\mathscr{A}(\lambda E_{ij}) = P^{-1}\left(\lambda^{\sigma_{ij}} E_{ij}\right) P, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Используя тот факт, что $\mathscr{A}(\lambda E_{ij}) = \mathscr{A}(E_{i1})\mathscr{A}(\lambda E_{11})\mathscr{A}(E_{1j})$, мы видим, что для любого $\lambda \in R$

$$\lambda^{\sigma} = \lambda^{\sigma_{11}} = \lambda^{\sigma_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

другими словами, $\sigma = \sigma_{11} = \sigma_{ij}$. Из (2.8) следует, что σ — взаимно однозначное отображение кольца R на себя, сохраняющее сложение. Далее, из $\mathscr{A}(\lambda\mu E_{11}) = \mathscr{A}(\lambda E_{11})\mathscr{A}(\mu E_{11})$ следует, что σ сохраняет умножение и потому является автоморфизмом кольца R. Так как $\mathscr{A}$ — автоморфизм кольца $\boldsymbol{M}_n(R)$, то получаем первую часть теоремы.

Обратно, отображение, определенное формулой (2.5), является, очевидно, изоморфизмом кольца $\boldsymbol{M}_n(R)$ в себя. Из условия, которому удовлетворяет P, легко вывести, что если $X \in \boldsymbol{M}_n(R)$, то $PXP^{-1} \in \boldsymbol{M}_n(R)$. Отсюда сразу следует, что это отображение кольца $\boldsymbol{M}_n(R)$ на себя. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 3. *Предположим, что R, R_1 — коммутативные области целостности, $\mathscr{A}$ — изоморфизм кольца $\boldsymbol{M}_n(R)$ в $\boldsymbol{M}_m(R_1)$. Тогда $m = n$, R и R_1 изоморфны и существует матрица P порядка m над R_1, удовлетворяющая условию* (1.3) *и такая, что*

$$\mathscr{A}(X) = P^{-1}X^{\sigma}P, \quad X \in \boldsymbol{M}_n(R), \tag{2.9}$$

где σ — изоморфизм R на R_1. Обратно, всякое отображение, определенное формулой (2.9), *является изоморфизмом $\boldsymbol{M}_n(R)$ на $\boldsymbol{M}_n(R_1)$.*

Отметим, что теорема 1 может быть применена также к описанию автоморфизмов и антиавтоморфизмов кольца всех квадратных матриц над коммутативной областью целостности и к описанию автоморфизмов полугруппы матриц по умножению.

Для некоммутативного R может быть доказана

Теорема 4. *Если R — область главных идеалов (не обязательно коммутативная) и P — невырожденная матрица порядка n над R, удовлетворяющая условию* (2.1), *то суще-*

ствует матрица $P_1 \in \boldsymbol{GL}_n(R)$, *такая, что*

$$P_1 X_{ij} = E_{ij} P_1, \quad i \neq j, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \tag{2.10}$$

где X_{ij} — *матрицы с условием* (2.1).

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 видно, что правый идеал, порожденный элементами $a_{11}, \ldots, a_{1n}$, совпадает с правым идеалом, порожденным элементами $a_{i1}, \ldots, a_{in}$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому все правые идеалы $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, \ldots, n$, совпадают с некоторым главным правым идеалом aR и $a_{ij} = aa'_{ij}$. Пусть $P = aP_1$. Тогда P_1 — невырожденная матрица над R, и выполняется (2.10). Докажем, что $P_1 \in \boldsymbol{GL}_n(R)$.

Так как R — область главных идеалов, то ее можно вложить [9] в тело частных $K(R)$. В $\boldsymbol{GL}_n(K(R))$ существует матрица, обратная к P_1, скажем, $P_1^{-1} = (b_{ij})$, $b_{ij} \in K(R)$. Чтобы показать, что $P_1 \in \boldsymbol{GL}_n(R)$, достаточно проверить включения $b_{ij} \in R$. Из доказательства теоремы 1 видно, что

$$b_{ij} a'_{kl} \in R, \quad 1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n.$$

Но, как замечено выше, $a = a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n$, $x_i \in R$, $a_{kl} = aa'_{kl}$. Отсюда $a'_{k1}x_1 + \ldots + a'_{kn}x_n = 1$ и

$$b_{ij} = b_{ij}a'_{k1}x_1 + \ldots + b_{ij}a'_{kn}x_n \in R.$$

Теорема доказана.

§ 3. Инволюции

В этом параграфе мы предполагаем, что R — кольцо характеристики $\neq 2$ без делителей нуля и с единицей (не обязательно коммутативное). Кроме того, предполагается, что для любых элементов $a, b \in R$ существует элемент $m \in R$, такой, что $m = aa_1 = bb_1$, где $a_1, b_1 \in R$. Тогда R может быть вложено в тело частных $K(R)$.

Цель этого параграфа — доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть* $\mathscr{A}$ — *изоморфизм группы* $\boldsymbol{SL}_n(R)$ *в* $\boldsymbol{GL}_n(R)$. *Тогда существует матрица* $P \in \boldsymbol{GL}_n(K(R))$, *такая, что*

$$\mathscr{A}(J_{ij}) = P^{-1} J_{ij} P, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.1}$$

где

$$J_i = J_{ji} = I^{(i-1)} \oplus (-1) \oplus I^{(j-i-1)} \oplus (-1) \oplus I^{(n-j)}, \quad i < j, \tag{3.2}$$

и $\oplus$ обозначает прямую сумму матриц.

Для доказательства нам понадобятся некоторые леммы и определения. *Инволюцией* называется элемент X группы $\boldsymbol{GL}_n(K(R))$, удовлетворяющий условию $X^2=I$. Инволюции, сопряженные над $\boldsymbol{SL}_n(K(R))$ с матрицей $(-I)^{(p)}\oplus I^{(n-p)}$, называются *$(p, n-p)$-инволюциями*. Максимальное множество попарно перестановочных $(p, n-p)$-инволюций в $\boldsymbol{GL}_n(K(R))$ называется $(p, n-p)$-максимальным множеством. Справедливы следующие утверждения:

Лемма 1 [2]. *Всякая инволюция из $\boldsymbol{GL}_n(K(R))$ является $(p, n-p)$-инволюцией для некоторого однозначно определенного p. Число элементов в любом $(p, n-p)$-максимальном множестве равно*

$$\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}.$$

Лемма 2 [2]. *Любое семейство попарно перестановочных инволюций может быть приведено одновременным сопряжением над $\boldsymbol{SL}_n(K(R))$ к виду*

$$\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \qquad \varepsilon_i=\pm 1. \tag{3.3}$$

Доказательство теоремы 5. Если $n=2$, то $J_{12}=-I^{(2)}$ и теорема очевидна. Пусть $n\geqslant 3$.

(1) Сначала докажем, что $\mathscr{A}(J_{ij})$ является $(p, n-p)$-инволюцией, $2\mid p$. Из леммы 1 следует, что все $\mathscr{A}(J_{ij})$ являются $(p, n-p)$-инволюциями, и, следовательно, остается убедиться, что $2\mid p$. Так как $n\geqslant 3$, то найдется $k\neq i, j$, $1\leqslant k\leqslant n$. Из соотношения $\mathscr{A}(J_{ij})=\mathscr{A}(J_{ik})\mathscr{A}(J_{kj})$ следует, что $\mathscr{A}(J_{ij})$ — произведение двух перестановочных $(p, n-p)$-инволюций. По лемме 2 существует матрица $P\in\boldsymbol{SL}_n(K(R))$, такая, что

$$\mathscr{A}(J_{ij})=P^{-1}\operatorname{diag}(\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n')P\cdot P^{-1}\operatorname{diag}(\varepsilon_1'', \ldots, \varepsilon_n'')P= \\ =P^{-1}\operatorname{diag}(\varepsilon_1'\varepsilon_1'', \ldots, \varepsilon_n'\varepsilon_n'')P,$$

причем -1 встречается p раз среди $\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n'$ и среди $\varepsilon_1'', \ldots, \varepsilon_n''$. Тогда последовательность $\varepsilon_1'\varepsilon_1'', \ldots, \varepsilon_n'\varepsilon_n''$ должна содержать -1 четное число раз. С другой стороны, -1 появляется в этой последовательности p раз, поэтому $2\mid p$.

(2) Определим $\mathfrak{A}$ как множество, состоящее из всех инволюций вида $\mathscr{A}(J_{i_1i_2})\ldots\mathscr{A}(J_{i_{2m-1}, i_{2m}})$, $m=1, \ldots, [n/2]$, $1\leqslant i_1<\ldots<i_{2m}\leqslant n$. Пусть $\mathfrak{A}_m$ — множество инволюций вида $\mathscr{A}(J_{i_1i_2})\ldots\mathscr{A}(J_{i_{2m-1}, i_{2m}})$, $1\leqslant i_1<\ldots<i_{2m}\leqslant n$. Из

определения инволюции J_{ij} и того, что $\mathscr{A}$ — изоморфизм, легко следует, что $\mathfrak{A}$ содержит всевозможные произведения инволюций вида $\mathscr{A}(J_{ij})$, а все элементы множества $\mathfrak{A}$ различны и попарно перестановочны. Кроме того, все элементы множества $\mathfrak{A}_m$ различны, попарно перестановочны и сопряжены над $\boldsymbol{SL}_n(K(R))$ (так как инволюции, сопряженные над $\boldsymbol{GL}_n(K(R))$, сопряжены и над $\boldsymbol{SL}_n(K(R))$, см. [8]). Ввиду леммы 2 существует матрица $P \in \boldsymbol{SL}_n(K(R))$, такая, что всякая матрица из $P\mathfrak{A}P^{-1}$ имеет вид (3.3). Из (1) видно, что -1 встречается среди ε_i четное число раз. Рассмотрим отдельно случаи, когда n четно и нечетно.

(3) Если n четно, то $n = 4l$ или $4l + 2$.

Если $n = 4l$, то $P\mathfrak{A}_l P^{-1}$ является $(2l, 2l)$-максимальным множеством, элементы из $P\mathfrak{A}_{l-1}P^{-1}$ и $P\mathfrak{A}_{l+1}P^{-1}$ перестановочны с элементами из $P\mathfrak{A}_l P^{-1}$ и число элементов в каждом из этих множеств равно

$$\binom{n}{2l-2} = \binom{n}{2l+2}.$$

Кроме того, элементы из $P\mathfrak{A}_{l-1}P^{-1}$ не сопряжены с элементами из $P\mathfrak{A}_{l+1}P^{-1}$. В силу (1) элементы обоих этих множеств содержат -1 четное число раз и, следовательно, по лемме 1 $P\mathfrak{A}_{l-1}P^{-1}$ является $(2l-2, 2l+2)$- или $(2l+2, 2l-2)$-максимальным множеством, а $P\mathfrak{A}_{l+1}P^{-1}$ является $(2l+2, 2l-2)$- или $(2l-2, 2l+2)$-максимальным множеством. Продолжая шаг за шагом это рассуждение, мы покажем, что $P\mathfrak{A}_{l-k}P^{-1}$ является $(2l-2k, 2l+2k)$- или $(2l+2k, 2l-2k)$-максимальным множеством, а $P\mathfrak{A}_{l+k}P^{-1}$ является $(2l+2k, 2l-2k)$- или $(2l-2k, 2l+2k)$-максимальным множеством $(k = 2, 3, \ldots)$. В частности, если $k = l-1$, то $P\mathfrak{A}_1 P^{-1}$ является $(2, n-2)$- или $(n-2, 2)$-максимальным множеством.

В случае когда $n = 4l + 2$, применим тот же метод, начиная с $P\mathfrak{A}_l P^{-1}$ и $P\mathfrak{A}_{l+1}P^{-1}$, и придем к тому, что $P\mathfrak{A}_1 P^{-1}$ является $(2, n-2)$- или $(n-2, 2)$-максимальным множеством.

Согласно доказанному выше, для четного $n \geqslant 4$ $P\mathfrak{A}_1 P^{-1}$ является $(2, n-2)$- или $(n-2, 2)$-максимальным множеством. Покажем теперь, что последний случай при $n > 4$ невозможен. Предположим противное. Тогда можно выбрать матрицу P (по поводу ее выбора см. п. (5) настоящего доказательства), такую, что

$$P\mathscr{A}(J_{ij})P^{-1} = (-I)^{(i-1)} \oplus (1) \oplus (-I)^{(j-i-1)} \oplus (1) \oplus (-I)^{(n-j)}, \quad j > i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.4}$$

Пусть

$$S_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\oplus I^{(n-2)},$$

тогда $(\mathscr{A}(S_{12}))^2=\mathscr{A}(S_{12}^2)=\mathscr{A}(J_{12})$; кроме того, $\mathscr{A}(S_{12})$ перестановочно с $\mathscr{A}(J_{12})$ и $\mathscr{A}(J_{ij})$ $(3\leqslant i<j\leqslant n)$. Из (3.4) легкими вычислениями получаем

$$\begin{gathered} P\mathscr{A}(S_{12})P^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\oplus \operatorname{diag}(a_3, \ldots, a_n), \\ a_3^2=\ldots=a_n^2=-1. \end{gathered} \tag{3.5}$$

С другой стороны, $(\mathscr{A}(S_{12})\mathscr{A}(J_{23}))^2=\mathscr{A}(S_{12}J_{23})^2=I$, и, значит, в силу (3.4) и первой части (3.5) имеем равенство

$$I=\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}^2\oplus \operatorname{diag}(a_3^2, \ldots, a_n^2),$$

откуда $a_3^2=\ldots=a_n^2=1$. Это противоречит второй части (3.5), потому что R имеет характеристику $\neq 2$. Следовательно, $P\mathfrak{A}_1P^{-1}$ является $(2, n-2)$-максимальным множеством.

(4) Если n нечетное, то $n=4l+1$ или $n=4l+3$.

Если $n=4l+1$, то из леммы 1 и того, что $P\mathfrak{A}_lP^{-1}$ содержит -1 четное число раз, заключаем, что $P\mathfrak{A}_lP^{-1}$ является $(2l, 2l+1)$-максимальным множеством. Так как всякий элемент множества $P\mathfrak{A}_{l+1}P^{-1}$ перестановочен со всяким элементом множества $P\mathfrak{A}_lP^{-1}$, число элементов в каждом из них равно

$$\binom{n}{2l}=\binom{n}{2l+1}$$

и -1 встречается в каждом из них четное число раз, то $P\mathfrak{A}_{l+1}P^{-1}$ является $(2l+2, 2l-1)$-максимальным множеством. Поступая так шаг за шагом, мы рассмотрим $P\mathfrak{A}_{l+2}P^{-1}$, $P\mathfrak{A}_{l-2}P^{-1}$, ... и, наконец, получим, что $P\mathfrak{A}_1P^{-1}$ является $(2, n-2)$-максимальным множеством.

Если $n=4l+3$, то применяем тот же метод, начиная с $P\mathfrak{A}_{l+1}P^{-1}$ и рассматривая $P\mathfrak{A}_lP^{-1}$, $P\mathfrak{A}_{l-1}P^{-1}$, ..., пока наконец не покажем, что $P\mathfrak{A}_1P^{-1}$ является $(2, n-2)$-максимальным множеством.

(5) Из (3) и (4) следует, что $P\mathfrak{A}_1P^{-1}$ в любом случае является $(2, n-2)$-максимальным множеством, и, следовательно, по лемме 2 существует матрица $P\in \boldsymbol{SL}_n(K(R))$,

такая, что

$$P\mathscr{A}(J_{ij})P^{-1}=J_{k_ik_j},\quad j\neq i,\quad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $k_1, \ldots, k_n$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Пусть Q обозначает подстановочную матрицу, такую, что $Q(t_{k_1}, \ldots, t_{k_n})'=(t_1, \ldots, t_n)'$, где $t_1, \ldots, t_n$ — переменные над R. Тогда $QJ_{k_ik_j}Q^{-1}=J_{ij}$, и теорема доказана.

§ 4. Вид элемента $\mathscr{A}(B_{ij}(1))$

Пусть $\mathscr{A}$ — изоморфизм группы $\boldsymbol{SL}_n(R)$ в $\boldsymbol{GL}_n(R)$. В этом параграфе мы наложим дополнительные ограничения на R и определим вид элемента $\mathscr{A}(B_{ij}(1))$. В дополнение к теореме из § 3 нам понадобятся некоторые соотношения между $\mathscr{A}(B_{ij}(1))$. Заметим, что полученные здесь результаты можно несколько усилить. Мы вернемся к этому вопросу в конце статьи.

Начнем со следующего простого замечания:

Лемма 3. *Предположим, что R — кольцо без делителей нуля с единицей и характеристики $\neq 2$. Пусть $a, b, c, d\in R$. Если*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2=-I,\quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -d \end{pmatrix}^2=I,$$

то $a=d=0$, $c=-b^{-1}$.

Доказательство. Из предположений следует, что $a^2+bc=-1$, $a^2-bc=1$, $d^2+cb=-1$, $d^2-cb=1$ и, значит, $2a^2=2d^2=0$. Так как R имеет характеристику $\neq 2$, то $a=d=0$ и $bc=cb=-1$.

В этом параграфе предполагается, что R удовлетворяет тем же условиям, что и в § 3. Пусть $K(R)$ — тело частных кольца R.

Теорема 6. *Если $n\geqslant 3$ и $\mathscr{A}$ — изоморфизм группы $\boldsymbol{SL}_n(R)$ в $\boldsymbol{GL}_n(R)$, то существует матрица $P\in\boldsymbol{GL}_n(K(R))$, такая, что*

$$P\mathscr{A}(B_{ij}(1))P^{-1}=B_{ij}(1),\qquad i\neq j,\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

или

$$P\mathscr{A}(B_{ij}(1))P^{-1}=B_{ji}(-1),\quad i\neq j,\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ n.$$

Доказательство. (1) Ввиду теоремы 5 можно считать, что

$$\mathscr{A}(J_{i,\,i+1})=J_{i,\,i+1},\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{4.1}$$

Теперь рассмотрим $\mathscr{A}(S_{i,\,i+1})$, где

$$S_{i,\,i+1} = I^{(i-1)} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I^{(n-i-1)}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Если $n = 3$ или $\geqslant 5$, то в силу перестановочности $\mathscr{A}(S_{12})$ с $\mathscr{A}(J_{12}) = J_{12}$ и $\mathscr{A}(J_{i,\,i+1})$, $3 \leqslant i \leqslant n-1$, после простых вычислений получаем

$$\mathscr{A}(S_{12}) = \begin{pmatrix} a^{(1)} & b^{(1)} \\ c^{(1)} & d^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \operatorname{diag}\left(a_3^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}\right).$$

Если $n = 4$, то ввиду перестановочности $\mathscr{A}(S_{12})$ с $\mathscr{A}(J_{12})$ и соотношений

$$(\mathscr{A}(S_{12}))^2 = \mathscr{A}(J_{12}), \quad (\mathscr{A}(S_{12})\,\mathscr{A}(J_{23}))^2 = I \tag{4.2}$$

снова получаем тот же результат, что и выше. Из (4.2) видно, что матрица

$$\begin{pmatrix} a^{(1)} & b^{(1)} \\ c^{(1)} & d^{(1)} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию леммы 3 и $\left(a^{(1)}\right)^2 = 1$, $3 \leqslant i \leqslant n$, следовательно,

$$\mathscr{A}(S_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & b^{(1)} \\ -b^{(1)^{-1}} & 0 \end{pmatrix} \oplus \operatorname{diag}\left(a_3^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}\right), \quad a_i^{(1)} = \pm 1.$$

Таким же способом получаем, что

$$\mathscr{A}\left(S_{i,\,i+1}\right) =$$

$$= \operatorname{diag}\left(a_1^{(i)}, \ldots, a_{i-1}^{(i)}\right) \oplus \begin{pmatrix} 0 & b^{(i)} \\ -b^{(i)^{-1}} & 0 \end{pmatrix} \oplus \operatorname{diag}\left(a_{i+1}^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}\right),$$

$$1 \leqslant i \leqslant n-1, \quad a_j^{(i)} = \pm 1, \quad j \neq i,\ i+1, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Беря композицию изоморфизма $\mathscr{A}$ с сопряжением при помощи матрицы

$$P = \operatorname{diag}\left(b^{(n-1)^{-1}} \ldots b^{(1)^{-1}},\ b^{(n-1)^{-1}} \ldots b^{(2)^{-1}}, \ldots,\ b^{(n-1)^{-1}},\ 1\right),$$

можем считать, что $b^{(i)} = 1$. Так как $\mathscr{A}(S_{i,\,i+1})$ перестановочно с $\mathscr{A}(S_{j,\,j+1})$, $1 \leqslant j \leqslant i-2$, $i+2 \leqslant j \leqslant n-1$, то $a_1^{(i)} = \ldots = a_{i-1}^{(i)}$, $a_{i+1}^{(i)} = \ldots = a_n^{(i)}$. Следовательно, можно считать, что

$$\mathscr{A}(S_{i,\,i+1}) = (a_i I)^{(i-1)} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus (a_i' I)^{(n-i-1)},$$

$$1 \leqslant i \leqslant n-1, \quad a_i' = \pm 1, \quad a_i = \pm 1.$$

Из этих соотношений и равенства $(\mathscr{A}(S_{i-1,\,i})\,\mathscr{A}(S_{i,\,i+1}))^3 = I$ получаем $a_{i-1} = a_i$, $a'_{i-1} = a_i$, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, откуда

$$\mathscr{A}(S_{i,\,i+1}) = (eI)^{(i-1)} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus (eI)^{(n-i-1)}, \tag{4.3}$$
$$i = 1, \ldots, n-1, \quad e = \pm 1.$$

С этого момента будем рассматривать (4.3) как предположение и определим $\mathscr{A}(B_{12}(1))$ в двух случаях: когда $n = 3$ или $\geqslant 5$ и когда $n = 4$.

(2) $n = 3$ или $\geqslant 5$. Так как $\mathscr{A}(B_{12}(1))$ перестановочно с $\mathscr{A}(J_{12})$ и $\mathscr{A}(J_{i,\,i+1})$, $3 \leqslant i \leqslant n-1$, то

$$\mathscr{A}(B_{12}(1)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \operatorname{diag}(a_3, \ldots, a_n).$$

Так как $\mathscr{A}(B_{12}(1))$ перестановочно с $\mathscr{A}(S_{i,\,i+1})$, $3 \leqslant i \leqslant n-1$, то $a_3 = \ldots = a_n = a'$. Из соотношения $\mathscr{A}(B_{12}(1)\,\mathscr{A}(J_{23}))^2 = I$ следует, что $a_i^2 = 1$ и

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}^2 = I,$$

и, значит,

$$\mathscr{A}(B_{12}(1)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \operatorname{diag}(a', \ldots, a'), \quad a' = \pm 1, \tag{4.4}$$
$$a^2 - bc = 1, \quad d^2 - cb = 1, \quad ab - bd = ca - dc = 0.$$

Но $\mathscr{A}(B_{13}(1)) = \mathscr{A}(S_{23}^{-1})\,\mathscr{A}(B_{12}(1))\,\mathscr{A}(S_{23})$ и матрица $\mathscr{A}(B_{12}(1))$ перестановочна с $\mathscr{A}(B_{13}(1))$. Отсюда

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & ea'b \\ ca' & a'd & 0 \\ eca & ecb & a'd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a'b & eab \\ ca & a'd & ecb \\ eca' & 0 & a'd \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

и $bc = 0$, $(a - a')\,b = c\,(a - a') = 0$. Но $(\mathscr{A}(B_{12}(1)))^2 \neq I$, поэтому ввиду (4.4) b и c не могут одновременно равняться нулю. Следовательно, $a = a'$ и либо $b = 0$, $c \neq 0$, либо $c = 0$, $b \neq 0$. Снова ввиду (4.4) $d = a'$, поэтому

$$\mathscr{A}(B_{12}(1)) = \begin{pmatrix} a' & b \\ 0 & a' \end{pmatrix} \oplus (a'I)^{(n-2)} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a' & 0 \\ c & a' \end{pmatrix} \oplus (a'I)^{(n-2)}.$$

Используя соотношение $(\mathscr{A}(S_{12})\,\mathscr{A}(B_{12}(1)))^3 = I$, (4.3) и последние формулы, получаем $a' = e$, $b = 1$, $c = -1$. Это

означает, что

$$\mathscr{A}(B_{12}(1)) = (eI)^{(n)} + E_{12} \quad \text{или} \quad (eI)^{(n)} - E_{21}, \quad e = \pm 1. \quad (4.6)$$

Наконец, докажем, что $e = 1$. Из соотношений

$$\mathscr{A}\left(S_{23}^{-1}\right) \mathscr{A}(B_{12}(1)) \mathscr{A}(S_{23}) = \mathscr{A}(B_{13}(1)),$$

(4.3) и (4.6) имеем

$$\mathscr{A}(B_{13}(1)) = (eI)^{(n)} + eE_{13} \quad \text{или} \quad (eI)^{(n)} - eE_{31}. \quad (4.7)$$

Так как $\mathscr{A}\left(S_{12}^{-1}\right) \mathscr{A}\left(S_{23}^{-1}\right) \mathscr{A}(B_{12}(1)) \mathscr{A}(S_{23}) \mathscr{A}(S_{12}) = \mathscr{A}(B_{23}(1))$, то в силу (4.3) и (4.6)

$$\mathscr{A}(B_{23}(1)) = (eI)^{(n)} + E_{23} \quad \text{или} \quad (eI)^{(n)} - E_{32}. \quad (4.8)$$

Используя (4.3), (4.7), (4.8) и соотношение

$$\mathscr{A}(B_{12}(-1)) \mathscr{A}(B_{23}(-1)) \mathscr{A}(B_{12}(1)) \mathscr{A}(B_{23}(1)) = \mathscr{A}(B_{13}(1)),$$

непосредственно заключаем, что

$$e = 1. \quad (4.9)$$

Из (4.3), (4.6), (4.9) и соотношений

$$\mathscr{A}\left(S_{12}^{-1}\right) \mathscr{A}(B_{12}(-1)) \mathscr{A}(S_{12}) = \mathscr{A}(B_{21}(1)),$$
$$\mathscr{A}\left(S_{ij}^{-1}\right) \mathscr{A}(B_{ki}(1)) \mathscr{A}(S_{ij}) = \mathscr{A}(B_{kj}(1)),$$
$$\mathscr{A}\left(S_{ij}^{-1}\right) \mathscr{A}(B_{ik}(1)) \mathscr{A}(S_{ij}) = \mathscr{A}(B_{jk}(1))$$

следует, что

$$\mathscr{A}(B_{1i}(1)) = B_{1i}(1), \quad \mathscr{A}(B_{i1}(1)) = B_{i1}(1), \quad i = 2, \ldots, n,$$

или

$$\mathscr{A}(B_{1i}(1)) = B_{i1}(-1), \quad \mathscr{A}(B_{i1}(1)) = B_{1i}(-1), \quad i = 2, \ldots, n.$$

Далее, так как $\mathscr{A}(B_{ij}(-1)) \mathscr{A}(B_{jk}(-1)) \mathscr{A}(B_{ij}(1)) \mathscr{A}(B_{jk}(1)) = \mathscr{A}(B_{ik}(1))$ при попарно различных i, j, k, то $\mathscr{A}(B_{ij}(1)) = B_{ij}(1)$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, или $\mathscr{A}(B_{ij}(1)) = B_{ji}(-1)$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

(3) $n = 4$. Так как $\mathscr{A}(B_{12}(1))$ и $\mathscr{A}(J_{12})$ перестановочны, то

$$\mathscr{A}(B_{12}(1)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Далее, так как $\mathscr{A}(B_{12}(1))$ и $\mathscr{A}(S_{34})$ перестановочны, то $a_1 = d_1$, $c_1 = -b_1$. Так как $(\mathscr{A}(B_{12}(1)) \mathscr{A}(J_{23}))^2 = I$, то

$$\begin{pmatrix} -a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}^2 = I, \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}^2 = I,$$

и, следовательно, $a_1^2+b_1^2=1$, $b_1a_1=a_1b_1$. Из (4.3) после вычислений с применением результатов, найденных выше, получаем

$$\mathscr{A}(B_{13}(1))=\mathscr{A}(S_{23}^{-1})\mathscr{A}(B_{12}(1))\mathscr{A}(S_{23})=\begin{pmatrix} a & 0 & eb & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & -eb_1 \\ ec & 0 & d & 0 \\ 0 & eb_1 & 0 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathscr{A}(B_{12}(1))$ и $\mathscr{A}(B_{13}(1))$ перестановочны, то

$$\begin{bmatrix} a^2 & ba_1 & eab & -ebb_1 \\ ca & da_1 & ecb & -edb_1 \\ ea_1c & eb_1^2 & a_1d & a_1b_1 \\ -eb_1c & ea_1b_1 & -b_1d & a_1^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2 & ab & eba_1 & ebb_1 \\ a_1c & a_1d & eb_1^2 & -eb_1a_1 \\ eca & ecb & da_1 & db_1 \\ eb_1c & eb_1d & -ab_1 & a_1^2 \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Таким образом, $2eb_1c=2ebb_1=0$. Если $b=c=0$, то $a^2=d^2=1$, и ввиду (4.10) $eb_1^2=ecb=0$, откуда $b_1=0$. Следовательно, $\mathscr{A}(B_{12}(1))=\operatorname{diag}(a, d, a_1, d_1)$ и $\mathscr{A}(B_{12}(1))=I$. Но это невозможно. Поэтому либо $b\neq 0$, либо $c\neq 0$. Так как характеристика кольца R отлична от 2, то $b_1=0$, откуда $a_1^2=0$, $ecb=eb_1^2=0$. Таким образом, $a_1=\pm 1$ и либо $b=0$, либо $c=0$. Из (4.10) получаем $eca=ea_1c$, $eab=eba_1$, откуда $a=a_1$. Так как

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}^2=I,$$

то $d=a$. Учитывая все сказанное, имеем

$$\mathscr{A}(B_{12}(1))=(a_1I)^{(4)}+bE_{12} \quad \text{или} \quad (a_1I)^{(4)}+cE_{21}, \quad a_1=\pm 1.$$

Из (4.3) и соотношения $(\mathscr{A}(S_{12})\mathscr{A}(B_{12}(1)))^3=I$ немедленно получаем

$$a_1=e, \quad b=1, \quad c=-1.$$

Далее точно так же, как и в случае (2), устанавливается справедливость теоремы для $n=4$. Теорема доказана.

§ 5. Доказательство основной теоремы

В этом параграфе мы докажем утверждение, упомянутое в § 1, а также соответствующий результат для областей главных идеалов.

Теорема 7. *Пусть R — коммутативная область целостности характеристики $\neq 2$, $n \geqslant 3$. Пусть $\mathscr{A}$ — изоморфизм группы $\boldsymbol{SL}_n(R)$ в $\boldsymbol{GL}_n(R)$. Тогда $\mathscr{A}$ имеет вид* (1.1) *или* (1.2). *Обратное также справедливо.*

Доказательство. По теореме 6 существует матрица $P_1 \in \boldsymbol{GL}_n(K(R))$ ($K(R)$ — поле частных кольца R), такая, что

$$P_1 \mathscr{A}(B_{ij}(1)) P_1^{-1} = B_{ij}(1), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

или

$$P_1 \mathscr{A}(B_{ij}(1)) P_1^{-1} = B_{ji}(-1), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Существует элемент $a \in R$, такой, что $aP_1 = P$ — невырожденная матрица порядка n над R и, значит,

$$P\mathscr{A}(B_{ij}(1)) = B_{ij}(1) P, \qquad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{5.1}$$

или

$$P\mathscr{A}(B_{ij}(1)) = B_{ji}(-1) P, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{5.2}$$

Из теоремы 1 немедленно следует, что P удовлетворяет условию (1.3). Покажем теперь, что в случае (5.1) имеет место (1.1). В случае (5.2) можно использовать тот же метод.

Прежде всего, из теоремы 1 мы знаем, что $P\mathscr{A}(B_{12}(\lambda))P^{-1}$ — матрица над R. Далее, так как $\mathscr{A}(B_{12}(\lambda))$ перестановочна с $\mathscr{A}(B_{12}(1))$ и $\mathscr{A}(B_{ij}(1))$, $3 \leqslant i, j \leqslant n$, то, используя (5.1), получаем

$$P\mathscr{A}(B_{12}(\lambda))P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \oplus (a_1 I)^{(n-2)}.$$

Кроме того, так как $\mathscr{A}(S_{23}^{-1})\mathscr{A}(B_{12}(\lambda))\mathscr{A}(S_{23}) = \mathscr{A}(B_{13}(\lambda))$, то

$$P\mathscr{A}(B_{13}(\lambda))P^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \oplus (a_1 I)^{(n-3)}.$$

Снова, так как

$$P\mathscr{A}(B_{13}(\lambda))P^{-1} = P(\mathscr{A}(B_{12}(-\lambda))\mathscr{A}(B_{23}(-1))\mathscr{A}(B_{12}(\lambda))\mathscr{A}(B_{23}(1)))P^{-1},$$

то

$$P\mathscr{A}(B_{13}(\lambda))P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 a^{-2} b \\ 0 & 1 & 1 - a^{-1} a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I^{(n-3)}.$$

Сравнивая эти две формулы, получаем $a = a_1 = 1$. Таким образом,

$$P\mathscr{A}(B_{12}(\lambda))P^{-1} = I^{(n)} + \lambda^\sigma E_{12}, \quad P\mathscr{A}(B_{13}(\lambda))P^{-1} = I^{(n)} + \lambda^\sigma E_{13}. \tag{5.3}$$

Используя эти формулы и (5.1), получаем

$$\begin{aligned} P\mathscr{A}(B_{1j}(\lambda))P^{-1} &= [P\mathscr{A}(B_{12}(-\lambda))P^{-1}][P\mathscr{A}(B_{2j}(-1))P^{-1}]\times \\ &\times [P\mathscr{A}(B_{12}(\lambda))P^{-1}][P\mathscr{A}(B_{2j}(1))P^{-1}] = \\ &= B_{12}(-\lambda^\sigma)B_{2j}(-1)B_{12}(\lambda^\sigma)B_{2j}(1) = \\ &= B_{1j}(\lambda^\sigma), \\ P\mathscr{A}(B_{ij}(\lambda))P^{-1} &= [P\mathscr{A}(B_{i1}(-1))P^{-1}][P\mathscr{A}(B_{1j}(-\lambda))P^{-1}]\times \\ &\times [P\mathscr{A}(B_{i1}(1))P^{-1}][P\mathscr{A}(B_{1j}(\lambda))P^{-1}] = \\ &= B_{i1}(-1)B_{1j}(-\lambda^\sigma)B_{i1}(1)B_{1j}(\lambda^\sigma) = \\ &= B_{ij}(\lambda^\sigma). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Покажем теперь, что σ — изоморфизм кольца R в себя. Из соотношений $\mathscr{A}(B_{12}(\lambda))\mathscr{A}(B_{12}(\mu)) = \mathscr{A}(B_{12}(\lambda+\mu))$ и (5.3) следует, что

$$(\lambda+\mu)^\sigma = \lambda^\sigma + \mu^\sigma, \ \lambda, \ \mu \in R.$$

Если $\mathscr{A}(B_{12}(\lambda)) = I$, то $B_{12}(\lambda) = I$, откуда $\lambda = 0$; поэтому из $\lambda^\sigma = 0$ следует $\lambda = 0$. Далее, ввиду (5.4) имеем

$$\begin{aligned} &B_{13}((\lambda\mu)^\sigma) = P\mathscr{A}(B_{13}(\lambda\mu))P^{-1} = \\ &= [P\mathscr{A}(B_{12}(-\lambda))P^{-1}][P\mathscr{A}(B_{23}(-\mu))P^{-1}][P\mathscr{A}(B_{12}(\lambda))P^{-1}]\times \\ &\qquad\times [P\mathscr{A}(B_{23}(\mu))P^{-1}] = \\ &= B_{12}(-\lambda^\sigma)B_{23}(-\mu^\sigma)B_{12}(\lambda^\sigma)B_{23}(\mu^\sigma) = B_{13}(\lambda^\sigma\mu^\sigma). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(\lambda\mu)^\sigma = \lambda^\sigma\mu^\sigma,$$

и теорема доказана.

В случае, когда R — область главных идеалов, аналогом теоремы 7 является

Теорема 8. *Если R — область главных идеалов (не обязательно коммутативная) характеристики $\neq 2$, $n \geqslant 3$ и $\mathscr{A}$ — изоморфизм группы $\boldsymbol{SL}_n(R)$ в $\boldsymbol{GL}_n(R)$, то либо*

$$\mathscr{A}(X) = P^{-1}X^\sigma P, \quad X \in \boldsymbol{SL}_n(R), \tag{5.5}$$

либо

$$\mathcal{A}(X) = P^{-1}((X^{\tau})')^{-1}P, \quad X \in \boldsymbol{SL}_n(R), \tag{5.6}$$

где σ — изоморфизм кольца R в себя, τ — антиизоморфизм кольца R в себя и $P \in \boldsymbol{GL}_n(R)$.

Доказательство. Из теоремы 6 следует существование матрицы $P_1 \in \boldsymbol{GL}_n(K(R))$, такой, что $P_1\mathcal{A}(B_{ij}(1)) = B_{ij}(1)P_1$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, или $P_1\mathcal{A}(B_{ij}(1)) = B_{ji}(-1)P_1$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Следовательно, существует элемент $a \in R$, такой, что $aP_1 = P_2$ — невырожденная матрица над R и $aB_{ij}(1)P_1 = B_{ij}(1)P_2$, $aB_{ji}(-1)P_1 = B_{ji}(-1)P_2$. Значит, либо $P_2\mathcal{A}(B_{ij}(1)) = B_{ij}(1)P_2$, либо $P_2\mathcal{A}(B_{ij}(1)) = B_{ji}(-1)P_2$. По теореме 4 существует матрица $P \in \boldsymbol{GL}_n(R)$, такая, что

$$\mathcal{A}(B_{ij}(1)) = P^{-1}B_{ij}(1)P, \quad i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, n, \tag{5.7}$$

или

$$\mathcal{A}(B_{ij}(1)) = P^{-1}B_{ji}(-1)P, \quad i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, n. \tag{5.8}$$

Так же как и в теореме 7, из (5.7) можно вывести соотношение (5.5), а из (5.8) — соотношение (5.6).

Теорема доказана.

Теорема 8 была впервые доказана Вань Чже-сянем [4] и Лэндином и Райнером [5]. Наше доказательство значительно проще, чем в [4], за счет использования теоремы 4.

Теорема 9. *Пусть R — коммутативная область целостности характеристики $\neq 2$, $n \geqslant 3$ и $S_n(R)$ — произвольная подгруппа из $\boldsymbol{GL}_n(R)$, содержащая $\boldsymbol{T}_n(R)$. Тогда $\boldsymbol{T}_n(R)$ — автоморфно допустимая подгруппа группы $S_n(R)$ (т. е. всякий автоморфизм группы $S_n(R)$ индуцирует автоморфизм группы $\boldsymbol{T}_n(R)$).*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{SL}_n(R, P)$ — подгруппа, порожденная матрицами $T_{ij}(\lambda, P)$ (§ 1), полученными из некоторой фиксированной матрицы P, удовлетворяющей условию (1.3). Пусть $\mathcal{A}$ — произвольный автоморфизм группы $S_n(R)$. Тогда $\mathcal{A}$ индуцирует изоморфизм группы $\boldsymbol{SL}_n(R, P)$ в $S_n(R)$. Пусть $\mathcal{A}_1(X) = P^{-1}XP$, $X \in \boldsymbol{SL}_n(R)$. Отображение $\mathcal{A}_1$ является изоморфизмом группы $\boldsymbol{SL}_n(R)$ в $\boldsymbol{SL}_n(R, P)$, и $\mathcal{A}_1(B_{ij}(\lambda)) = T_{ij}(\lambda, P)$. Следовательно, $\mathcal{A}\mathcal{A}_1$ — изоморфизм группы $\boldsymbol{SL}_n(R)$ в $S_n(R)$. По теореме 6

$$\mathcal{A}(Y) = \mathcal{A}(\mathcal{A}_1(X)) = P_1^{-1}X^{\sigma}P_1, \quad Y \in \boldsymbol{SL}_n(R, P), \quad X \in \boldsymbol{SL}_n(R), \tag{5.9}$$

или

$$\mathscr{A}(Y)=\mathscr{A}(\mathscr{A}_1(X))=P_1^{-1}\left[(X^{\sigma})'\right]^{-1}P_1,\quad Y\in \boldsymbol{SL}_n(R,\ P),$$
$$X\in \boldsymbol{SL}_n(R).\quad (5.10)$$

Так как σ — изоморфизм кольца R в себя, то $\mathscr{A}$ отображает $\boldsymbol{T}_n(R)$ в себя.

Из сказанного выше ясно, что для доказательства теоремы достаточно установить следующие два факта: (а) σ в (5.9) или (5.10) является автоморфизмом кольца R при любой группе $\boldsymbol{SL}_n(R,\ P)$; (б) если P может быть произвольной матрицей, удовлетворяющей условию (1.3), то и P_1 может быть такой же.

Докажем сначала (а). Мы ограничимся случаем (5.9), так как доказательство в случае (5.10) вполне аналогично. Допустим, что σ не является автоморфизмом кольца R. Тогда существует $\mu\neq\lambda^{\sigma}$ для всех $\lambda\in R$, поэтому $\mathscr{A}(T_{12}(\lambda,\ P))\neq$ $\neq P_1^{-1}B_{12}(\mu)P_1$ для всех $\lambda\in R$. Пусть $P_1^{-1}B_{12}(\mu)P_1=\mathscr{A}(B)$, $B\in S_n(R)$. Так как матрица $P_1^{-1}B_{12}(\mu)P_1$ перестановочна с $P_1^{-1}B_{ij}(1)P_1$, $3\leqslant i,\ j\leqslant n$, $P_1^{-1}J_{12}P_1$ и $P_1^{-1}B_{13}(1)P_1$, то из (5.9 следует, что B перестановочна с $P^{-1}B_{ij}(1)P$, $3\leqslant i,\ j\leqslant n$ $P^{-1}J_{12}P$ и $P^{-1}B_{13}(1)P$. Отсюда простым вычислением получаем

$$B=eP^{-1}B_{12}(\lambda_1)P,\quad \lambda_1,\ e^{-1}\in R.$$

Так как $B_{12}(\mu)J_{13}B_{12}(\mu)=J_{13}$, то $e^2=1$, $e=\pm1$. Следовательно, из (5.9) и того, что $\mathscr{A}$ — автоморфизм группы $S_n(R)$, получаем

$$\mathscr{A}(B)=eP_1^{-1}B_{12}\left(\lambda_1^{\sigma}\right)P_1=P_1^{-1}B_{12}(\mu)P_1.$$

Отсюда $e=1$, $\lambda_1^{\sigma}=\mu$. Но это противоречит тому, что $\mu\neq\lambda^{\sigma}$, и (а) доказано.

Теперь докажем (б). Допустим, что существует матрица P_1, удовлетворяющая условию (1.3) и такая, что для всех матриц P, удовлетворяющих (1.3), не выполняется ни одно из соотношений (5.9), (5.10). Рассмотрим $\mathscr{A}^{-1}$. Так как $\mathscr{A}$ — автоморфизм группы $S_n(R)$, то $\mathscr{A}^{-1}$ — также автоморфизм. Из основной теоремы 1 заключаем, что существует матрица P_2, удовлетворяющая (1.3) и такая, что

$$\mathscr{A}^{-1}(T_{ij}(\lambda,\ P_1))=P_2^{-1}B_{ij}\left(\lambda^{\sigma_1}\right)P_2,$$
$$i\neq j,\quad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \lambda\in R,$$

или

$$\mathscr{A}^{-1}(T_{ij}(\lambda, P_1)) = P_2^{-1}B_{ji}(-\lambda^{\sigma_1})P_2,$$
$$i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad \lambda \in R,$$

где σ_1 — автоморфизм кольца R. Применив $\mathscr{A}$ к этим равенствам, получим противоречие с нашим допущением. Таким образом, утверждение (б), а вместе с ним теорема доказаны.

В случае когда R — область главных идеалов, теорема 9 имеет следующий аналог:

Теорема 10. *Предположим, что R — область главных идеалов характеристики $\neq 2$, $n \geqslant 3$ и $\boldsymbol{T}_n(R)$ обозначает группу, порожденную всеми матрицами $P^{-1}B_{ij}(\lambda)P$, $P \in \boldsymbol{GL}_n(R)$, $\lambda \in R$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $S_n(R)$ — произвольная подгруппа группы $\boldsymbol{GL}_n(R)$, содержащая $\boldsymbol{T}_n(R)$. Тогда $\boldsymbol{T}_n(R)$ — автоморфно допустимая подгруппа группы $S_n(R)$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9 и потому опускается.

Результаты этого параграфа естественно приводят к вопросу: если R — коммутативная область целостности с единицей характеристики $\neq 2$, то каковы автоморфизмы групп $\boldsymbol{GL}_n(R)$ и $\boldsymbol{L}_n(R)$ при $n \geqslant 3$? Его решение зависит от описания автоморфизмов группы $\boldsymbol{T}_n(R)$. Автор предполагает, что если R удовлетворяет указанным выше условиям и $n \geqslant 3$, то для всякого автоморфизма $\mathscr{A}$ группы $\boldsymbol{T}_n(R)$ либо $P\mathscr{A}(X) = X^{\sigma}P$ для всех $X \in \boldsymbol{T}_n(R)$, либо $P\mathscr{A}(X) = (X^{\sigma})'^{-1}P$ для всех $X \in \boldsymbol{T}_n(R)$, где σ — автоморфизм кольца R и P удовлетворяет условию (1.3).

§ 6. Усиление результатов предыдущих параграфов

В этом параграфе мы укажем, как результаты предыдущих параграфов могут быть усилены. Для доказательств, вполне аналогичных предыдущим или доказательствам, данным в работе [7], мы приводим только наброски. Доказательства, не совсем аналогичные, будут проведены детально.

(1) Пусть R — произвольное кольцо (не обязательно коммутативное) с единицей 1, причем $1 + 1 \neq 0$. Пусть G — абстрактная группа с единичным элементом I, порождающими которой являются символы $T_{ij}(\lambda)$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\lambda \in R$,

а соотношения таковы:

$$T_{ij}(\lambda)\,T_{ij}(\mu)=T_{ij}(\lambda+\mu),$$
$$T_{ij}(\lambda)=I \text{ тогда и только тогда, когда } \lambda=0, \tag{6.1}$$
$$T_{ij}(\lambda) \text{ перестановочно с } T_{kj}(\mu),\ T_{ik}(\mu),\ T_{kl}(\mu), \tag{6.2}$$
$$T_{ij}(-\lambda)\,T_{jk}(-\mu)\,T_{ij}(\lambda)\,T_{jk}(\mu)=T_{ik}(\lambda\mu), \tag{6.3}$$

где индексы i, j, k, $l=1, \ldots, n$ попарно различны, λ — произвольный элемент кольца R. Имеем также

$$T_{12}(1)\,T_{21}(-1)\,T_{12}(\lambda)=T_{21}(-\lambda)\,T_{12}(1)\,T_{21}(-1), \tag{6.4}$$
$$T_{12}(-1)\,T_{21}(1)\,T_{12}(\lambda)=T_{21}(-\lambda)\,T_{12}(-1)\,T_{21}(1), \tag{6.5}$$
$$(T_{12}(1)\,T_{21}(-1)\,T_{12}(2))^3=I, \tag{6.6}$$

где λ — произвольный элемент из R.

Как и в [7], положим

$$U_{ij}=T_{ij}(1)\,T_{ji}(-1)\,T_{ij}(1), \quad W_{ij}=U^{2}{}_{j}.$$

Можно доказать, что выполняются следующие соотношения:

$$T_{ik}(\lambda)\,U_{ij}=U_{ij}T_{jk}(\lambda), \quad T_{ki}(\lambda)\,U_{ij}=U_{ij}T_{kj}(\lambda), \tag{6.7}$$
$$T_{jk}(\lambda)\,U_{ij}=U_{ij}T_{ik}(-\lambda), \quad T_{kj}(\lambda)\,U_{ij}=U_{ij}T_{ki}(-\lambda), \tag{6.8}$$
$$U_{ij}=U_{ji}^{-1}, \quad W_{ij}^2=I, \quad W_{ij}=W_{ji}, \quad (U_{ij}T_{ij}(1))^3=I, \tag{6.9}$$
$$U_{ij}T_{ij}(\lambda)=T_{ji}(-\lambda)\,U_{ij}, \quad U_{ij}T_{ji}(\lambda)=T_{ij}(-\lambda)\,U_{ij}, \tag{6.10}$$
$$W_{ij} \text{ перестановочно с } T_{ij}(\lambda),\ T_{ji}(\lambda),\ U_{ij}, \tag{6.11}$$
$$U_{ij}U_{ki}=U_{ki}U_{jk}=U_{jk}U_{ij},\ U_{ij}U_{jk}=U_{ik}U_{ij}=U_{jk}U_{ik},\ (U_{ij}U_{jk})^3=I,$$
$$W_{ij}=T_{ik}(-\lambda)\,W_{ij}T_{ik}(\lambda)=T_{kj}(\lambda)\,W_{ij}T_{kj}(\lambda)=T_{ki}(\lambda)\,W_{ij}T_{ki}(\lambda)=$$
$$=T_{jk}(\lambda)\,W_{ij}T_{jk}(\lambda), \tag{6.12}$$
$$(T_{ij}(\lambda)\,U_{jk})^4=I. \tag{6.13}$$
$$W_{ij}W_{jk}=W_{ik}, \tag{6.14}$$
$$W_{ij},\ i,\ j=1, \ldots, n, \text{ попарно перестановочны.} \tag{6.15}$$

В этих соотношениях i, j, k обозначают попарно различные числа из последовательности $1, \ldots, n$, λ — произвольный элемент кольца R.

С тем же доказательством, что и в [7], справедлива

Теорема 11. *Пусть* $i_1, \ldots, i_{2m}$ *и* $i'_1, \ldots, i'_{2l}$ — *два множества попарно различных чисел из* $1, \ldots, n$. *Тогда*

(а) $W_{i_1 i_2} \ldots W_{i_{2m-1} i_{2m}}$ *и* $W_{i'_1 i'_2} \ldots W_{i'_{2l-1} i'_{2l}}$ — *две перестановочные инволюции* (*элемент* $X \in G$ *называется инволюцией, если* $X^2 = I$);

(б) *если* $m = l$, *то* $W_{i_1 i_2} \ldots W_{i_{2m-1} i_{2m}}$ *и* $W_{i'_1 i'_2} \ldots W_{i'_{2l-1} i'_{2l}}$ *сопряжены в* G;

(в) *если* $m = l$ *и* $i'_1, \ldots, i'_{2m}$ *является перестановкой чисел* $i_1, \ldots, i_{2m}$, *то две инволюции, указанные выше, эквивалентны*;

(г) *если* $2m < n$, *то* $W_{i_1 i_2} \ldots W_{i_{2m-1} i_{2m}}$ *не лежит в центре группы* G.

(2) В этой части R и $T_{ij}(\lambda)$ удовлетворяют не только условиям (1), но также следующим условиям: R не имеет делителей нуля и любые два элемента из R имеют общее правое кратное (т. е. если $a, b \in R$, то существует элемент $m \in R$, такой, что $m = aa_1 = bb_1$, $a_1, b_1 \in R$, и, следовательно, R может быть вложено в тело частных $K(R)$. Допустим, что $T_{ij}(\lambda) \in \boldsymbol{GL}_n(R)$ и W_{ij} и U_{ij} определены так же, как в (1). Тогда справедлива

Теорема 12. *Если* n — *четное число*, $n \geqslant 4$, то

$$W_{12} W_{34} \ldots W_{n-1, n} = -I.$$

Доказательство. Используя (6.8), (6.13) и части (б) и (в) теоремы 10, поступим, как в доказательстве п. (1) теоремы 5, и получим, что W_{ij} является $(p, n-p)$-инволюцией группы $\boldsymbol{GL}_n(R)$, $2 \mid p$. Оставшаяся часть доказательства проводится так же, как доказательство соответствующей теоремы в [7].

Учитывая формулы, указанные выше, теоремы 11, 12 и замечая, что W_{ij} имеет все свойства матрицы $\mathscr{A}(J_{ij})$, которые использовались при доказательстве теоремы 5, мы получаем следующую теорему:

Теорема 5′. (а) *Если* $n = 3$ *или* $\geqslant 5$, *то существует матрица* $P \in \boldsymbol{GL}_n(K(R))$, *такая, что*

$$W_{ij} = P^{-1} J_{ij} P, \quad i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, n.$$

(б) *Если* $n = 4$, *то существует матрица* $P \in \boldsymbol{GL}_4(K(R))$, *такая, что*

$$W_{12} = P^{-1} J_{12} P.$$

Это означает, что справедлива также

Теорема 6′. *Если* $n \geqslant 3$, *то существует матрица* $P \in GL_n(K(R))$, *такая, что*

$$PT_{ij}(1)P^{-1} = B_{ij}(1), \quad i \neq j,\ i,\ j = 1, \ldots, n,$$

или

$$PT_{ij}(1)P^{-1} = B_{ji}(-1), \quad i \neq j,\ i,\ j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. а) Если $n = 3$ или $\geqslant 5$, то мы применяем теорему 5′ и замечаем, что свойства матриц $\mathscr{A}(B_{ij})$, $\mathscr{A}(S_{ij})$ и $\mathscr{A}(J_{ij})$, использованные в доказательстве теоремы 6, выполняются для элементов $T_{ij}(1)$, U_{ij} и W_{ij} соответственно. Отсюда следует, что теорема 6′ справедлива при $n = 3$ или $\geqslant 5$.

б) Если $n = 4$, то в силу леммы 2, теоремы 5′ (б) и (6.15) существует элемент P группы $SL_4(K(R))$, такой, что $PW_{12}P^{-1} = J_{12}$, $PW_{23}P^{-1} = J_{23}$. Таким образом, можно положить

$$W_{12} = J_{12}, \quad W_{23} = J_{23}. \tag{6.16}$$

Так как U_{12} перестановочна с $W_{12} = U_{12}^2$ и $(U_{12}W_{23})^2 = I$, то

$$U_{12} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = -I,$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -e & f \\ -g & h \end{pmatrix}^2 = I.$$

Поэтому в силу леммы 3

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 \pm fg = h^2 \pm gf = 1,$$

$$ef \pm fh = ge \pm hg = 0,$$

откуда

$$fg = 0, \quad e^2 = h^2 = 1, \quad e = \pm 1, \quad h = \pm 1.$$

Так как $e + h$ и $e - h$ не могут одновременно равняться нулю, то

$$f = g = 0, \quad e = \pm 1, \quad h = \pm 1, \quad U_{12} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}.$$

Таким же способом получаем, что

$$U_{23} = (e_1) \oplus \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} \oplus (h_1), \quad e_1 = \pm 1,\ h_1 = \pm 1.$$

Так как $(U_{12}U_{23})^3=I$, то $h=h_1$, $e=e_1$. Взяв композицию $\mathscr{A}$ с сопряжением при помощи матрицы $\operatorname{diag}(b_1^{-1}b^{-1}, b^{-1}, 1, 1)$, можно считать, что

$$U_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad U_{23}=(e)\oplus\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\oplus(h),$$
$$e=\pm 1, \quad h=\pm 1. \tag{6.17}$$

Покажем теперь, что

$$W_{34}=-W_{12}. \tag{6.18}$$

Так как W_{34} перестановочно с W_{12} и W_{23}, то $W_{34}=\operatorname{diag}(a, b, c, d)$. Далее, так как W_{34} перестановочно с U_{12}, то $U_{23}W_{34}U_{23}=W_{34}$. Ввиду (6.17) $W_{34}=\operatorname{diag}(a, a, -a, d)$. Из соотношения $W_{34}^2=I$ следует, что $a=\pm 1$, $d=\pm 1$. Но из утверждения (б) теоремы 5′ можно заключить, что $d=-a$ и, следовательно,

$$W_{34}=-aW_{12}, \quad a=\pm 1.$$

Таким образом, для доказательства (6.18) достаточно убедиться, что $a=1$. Допустим, что $a=-1$. Тогда $W_{34}=W_{12}$, и, как и прежде, можно доказать, что

$$U_{34}=\begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ -b_2^{-1} & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e_2 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}, \quad e_2=\pm 1, \quad h_2=\pm 1.$$

Так как $I=W_{12}W_{34}=(U_{12}U_{34})^2$ и $(U_{23}U_{34})^3=I$, то $b_2=\pm 1$, $e_2=e$, $h_2=h$. Из этих соотношений и из (6.17) и (6.16) получаем

$$(U_{12}U_{23}U_{34})^2=\operatorname{diag}(b_2, 1, b_2, 1)=\begin{cases} W_{13}, & \text{если } b_2=-1, \\ I, & \text{если } b_2=1. \end{cases}$$

С другой стороны, из (6.11) легко вывести, что $(U_{12}U_{23}U_{34})^2=U_{13}U_{34}^2U_{12}^2U_{24}$.

Ввиду этих двух формул

$$U_{13}^{\pm 1}U_{34}^2U_{12}^2U_{24}=I.$$

Отсюда и из (6.7), (6.9), (6.12) имеем $T_{13}(1)=T_{31}(-1)$. Если характеристика кольца R равна 3, то $W_{13}=T_{13}(6)=I$, и это противоречит утверждению (г) теоремы 11. Если характеристика кольца R не равна 3, то, подставляя это равенство в последнее из соотношений (6.8), получаем $T_{13}(12)=I$. Но

это противоречит соотношению (6.1), и, таким образом, (6.18) доказано. Поэтому можно положить

$$W_{ij}=J_{ij}, \quad i\neq j, \ 1\leqslant i, \ j\leqslant 4.$$

Начиная с этого момента можно провести доказательство, как в теореме 6, и установить справедливость теоремы 6′ для $n=4$. Тем самым теорема полностью доказана.

Используя теорему 6′, можно теперь провести доказательство, как в теореме 7, и усилить ее следующим образом:

Теорема 7′. *Пусть R — коммутативная область целостности характеристики $\neq 2$, $n\geqslant 3$. Пусть $\mathcal{A}$ — гомоморфизм группы $\boldsymbol{SL}_n(R)$ в $\boldsymbol{GL}_n(R)$, такой, что $\mathcal{A}(B_{ij}(\lambda))=I$ равносильно условию $\lambda=0$. Тогда $\mathcal{A}$ — изоморфизм вида* (1.1) *или* (1.2).

Как и теорема 8, результат Вань Чже-сяня [4] и Райнера об автоморфизмах общей линейной группы над областью главных идеалов (не обязательно коммутативной) характеристики $\neq 2$, а также упомянутый в § 1 результат Вань Чже-сяня об автоморфизмах линейной группы над дедекиндовым кольцом характеристики $\neq 2$ могут быть усилены в духе теоремы 7′.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, Springer-Verlag, Berlin, 1955. [Русский перевод: Ж. Дьёдонне, Геометрия классических групп, «Мир», М., 1974.]
2. Hua Luo-geng, Wan Zhe-xian, Classical groups, Science and Technology Press, Shanghai, 1963 (на кит. языке).
3. L. K. Hua, I. Reiner, Automorphisms of the unimodular group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 331—348.
4. Wan Zhe-xian, On the automorphism of linear groups over a non-commutative principal ideal domain of characteristic ≠2, *Acta Math. Sinica*, **7** (1957), 533—573.
5. J. Landin, I. Reiner, Automorphisms of the linear groups over a principal ideal domain, *Ann. Math.*, **65** (1957), 519—526.
6. Yan Shi-jian, Linear groups over a commutative integral domain, *Sci. Record*, **1** (1957), 279—282 (на кит. языке).
7. Yan Shi-jian, Identities of unimodular matrices and automorphisms of a unimodular group, *Sci. Record*, **1** (1957), 13—16 (на кит. языке).
8. Yan Shi-jian, Symplectic groups over a commutative ring, *J. Peking Normal Univ. Nat. Sci.*, **2** (1957), 23—46 (на кит. языке).
9. N. Jacobson, The theory of rings, Providence, R. I., 1943. [Русский перевод: Н. Джекобсон, Теория колец, ИЛ, М., 1957.]

ДОПОЛНЕНИЕ РЕДАКТОРА

ОБЗОР НОВЕЙШИХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБ АВТОМОРФИЗМАХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

Ю. И. Мерзляков

Ниже приводится обзор результатов, опубликованных после мая 1973 г. (с небольшими экскурсами в историю), а также полная библиография по теории автоморфизмов классических групп.

Прежде всего отметим две недавние работы Далла [72, 65], в которых решается проблема описания автоморфизмов двумерных групп $\boldsymbol{GL}_2$, $\boldsymbol{SL}_2$, $\boldsymbol{PGL}_2$ и $\boldsymbol{PSL}_2$ над произвольной областью целостности $\mathfrak{o}$. Напомним, что при $n \geqslant 3$ теорию автоморфизмов для $\boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o})$, $\boldsymbol{SL}_n(\mathfrak{o})$ построил О'Мира [35], а для $\boldsymbol{PGL}_n(\mathfrak{o})$, $\boldsymbol{PSL}_n(\mathfrak{o})$ — Солацци [60] (см. наст. сборник, стр. 160), поэтому вопрос для $n=2$ представлял первоочередной интерес. В некоторых частных случаях он был решен сравнительно давно — над кольцом $\mathbb{Z}$ в работах [7, 10], а над кольцом гауссовых целых $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ в работе [22], причем во всех этих случаях группа автоморфизмов имеет порождающие элементы обычных типов: а) автоморфизмы, индуцированные сопряжениями в $\boldsymbol{GL}_2(\mathfrak{o})$, б) автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами кольца $\mathfrak{o}$ (действующими на матрицы поэлементно), в) автоморфизмы вида $x \mapsto \chi(x)\cdot x$, где χ — гомоморфизм группы в ее центр (в проективном случае, конечно, отсутствуют).

В 1957 г. Райнер [16] обнаружил у группы $\boldsymbol{GL}_2(k[x])$, где k — поле, новый тип автоморфизмов. Именно, возьмем в качестве порождающих элементов этой группы матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Пусть φ — автоморфизм *векторного пространства* $k[x]$ над полем k, но не кольца $k[x]$, причем $\varphi(1)=1$. Для всякой матрицы $T \in \boldsymbol{GL}_2(k[x])$ пусть T^{φ} обозначает матрицу, получаемую из T поэлементным применением φ. Тогда отображение $T \mapsto T^{\varphi}$ *на порождающих элементах* (1) индуцирует искомый автоморфизм группы $\boldsymbol{GL}_2(k[x])$ (подчеркнем, что он *не* совпадает с $T \mapsto T^{\varphi}$ на всей группе).

Поначалу этот „нестандартный“ тип автоморфизмов воспринимался как досадное исключение, и усилия ряда авторов были направлены на отыскание условий, при которых он не возникает [23, 44]. Со временем, однако, необходимость особой теории для $n = 2$ стала очевидной, и Кон [34] развил такую теорию для остепененных GE_2-колец, охватив автоморфизмы Райнера путем рассмотрения U-автоморфизмов кольца (см. настоящий сборник, стр. 46). В обсуждаемой работе Далла [72] двумерная теория строится уже для произвольных GE_2-областей.

Более точно, пусть $\mathfrak{o}$ — (коммутативная) область целостности, F — ее поле частных, V — двумерное векторное пространство над F с базой x, y. Тогда $M = \mathfrak{o}x + \mathfrak{o}y$ — свободный $\mathfrak{o}$-модуль ранга 2. Пусть $\boldsymbol{GL}_2(M)$ — подгруппа группы $\boldsymbol{GL}_2(V)$, состоящая из преобразований, отображающих M на себя, $\boldsymbol{SL}_2(M)$ — ее подгруппа преобразований с определителем 1, $\boldsymbol{GE}(x, y)$ — подгруппа, порожденная преобразованиями из $\boldsymbol{GL}_2(M)$, имеющими в базе x, y матрицы (1), $\boldsymbol{E}(x, y)$ — подгруппа, порожденная преобразованиями из $\boldsymbol{GL}_2(M)$ с унитреугольными матрицами в базе x, y. Если G — любая из этих четырех групп, то пусть PG обозначает ее факторгруппу по подгруппе скалярных преобразований. Далл вводит четыре типа отображений кольца $\mathfrak{o}$, названных им R-, S-, T- и U-автоморфизмами, которые, будучи применены поэлементно к порождающим матрицам групп $\boldsymbol{PE}(x, y)$, $\boldsymbol{E}(x, y)$, $\boldsymbol{PGE}(x, y)$, $\boldsymbol{GE}(x, y)$ соответственно, индуцируют их автоморфизмы. А именно, он определяет *дробное замыкание* $\mathfrak{o}^F$ кольца $\mathfrak{o}$ в поле F как множество всех элементов из F, представимых в виде конечных цепных дробей

$$r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_3 + \cfrac{1}{\ddots\ r_m}}},$$

где $r_1, \ldots, r_m \in \mathfrak{o}$, и под *$R$-автоморфизмом* кольца $\mathfrak{o}$ понимает любое отображение *: $\mathfrak{o}^F \to F$, инъективное на $\mathfrak{o}$, отображающее $\mathfrak{o}$ на $\mathfrak{o}$ и такое, что

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^* = \frac{1}{\alpha^*} \text{ для всех } \alpha \neq 0 \text{ из } \mathfrak{o}^F, \tag{2}$$

$$(a + b)^* = a^* + b^* \text{ для всех } a \in \mathfrak{o},\ b \in \mathfrak{o}^F. \tag{3}$$

При некоторых добавочных условиях R-автоморфизм называется S-, T- или U-автоморфизмом. Справедлива следующая теорема:

Пусть $\mathfrak{o}$ — GE_2-*кольцо, причем в характеристике* 0 *предполагается, что* $\mathfrak{o}$ *содержит обратимые элементы, отличные от* ± 1. *Тогда всякий автоморфизм группы* $\boldsymbol{PSL}_2(M)$ *есть произведение автоморфизма, индуцированного* R-*автоморфизмом кольца* $\mathfrak{o}$, *и автоморфизма, индуцированного сопряжением в группе* $\boldsymbol{GL}_2(V)$.

Аналогичные теоремы доказаны в [72] для групп $\boldsymbol{SL}_2(M)$, $\boldsymbol{PGL}_2(M)$ и $\boldsymbol{GL}_2(M)$. Первоначальное предположение, что в характеристике 0 кольцо $\mathfrak{o}$ должно содержать обратимые элементы, отличные от корней 4-й степени из единицы, ослаблено в [65].

Хан в работе [66] применил метод О'Миры к проективным группам изометрий пространств с рефлексивной формой и развил — в размерностях $\geqslant 5$ — единую теорию изоморфизмов их подгрупп, богатых проективными сдвигами. Идеи этой работы нашли отражение в гл. 5 лекций О'Миры [74] (см. настоящий сборник). Из новых результатов работы [66] отметим теорию изоморфизмов для линейных, симплектических и унитарных конгруэнц-групп и их проективных образов над областями целостности (в унитарном случае необходимо ограничиться арифметическими областями), не зависящую от характеристики кольца, индекса Витта и типа группы, а также теорию изоморфизмов для унитарных, специальных унитарных и соответствующих проективных групп в случае произвольного индекса Витта и поля произвольной характеристики (все это, разумеется, в размерностях $\geqslant 5$). Для ортогональных групп, не охваченных работой [66], соответствующая теория была развита Ханом в [75], где доказана следующая теорема:

Пусть V — *регулярное пространство размерности* $n \geqslant 7$ *над бесконечным полем* F *характеристики* $\neq 2$ *с билинейной формой* B, Δ — *подгруппа группы* $\boldsymbol{PO}_n(V)$, *богатая проективными плоскими вращениями. Пусть* V_1, F_1, n_1, B_1, Δ_1 — *второй набор объектов с аналогичными свойствами, причем* $n \neq 8$ *или* $n_1 \neq 8$. *Тогда для всякого изоморфизма* $\Lambda\colon \Delta \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \Delta_1$ *существует единственный изоморфизм* $\overline{\Phi}_g\colon \boldsymbol{PGL}_n(V) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{PGL}_{n_1}(V_1)$, *такой, что* $\Lambda = \overline{\Phi}_g|_\Delta$. *При этом полулинейный изоморфизм* $g\colon V \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow V_1$ *и ассоциированный с ним изоморфизм полей* $\mu\colon F \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow F_1$ *при подходящем* $\alpha \in F_1$, $\alpha \neq 0$, *удовлетворяют соотношению*

$$B_1(gx, gy) = \alpha \cdot B(x, y)^\mu \quad \textit{для всех } x, y \in V.$$

Автоморфизмы ортогональных групп над полем F характеристики 2 исследовал Коннорс [63, 71]. В работе [63] он

рассмотрел полную ортогональную группу $\boldsymbol{O}(V)$, ее группу вращений $\boldsymbol{O}^+(V)$, коммутант $\boldsymbol{\Omega}(V)$ и ядро спинорной нормы $\boldsymbol{O}'(V)$. Напомним, что автоморфизмы этих групп изучались ранее Дьёдонне [5], Стейнбергом [25], Сю Чжень-хао [36] и Хамфрисом [45] при различных ограничениях на поле или геометрию пространства. Так, например, Сю Чжень-хао [36] нашел автоморфизмы групп $\boldsymbol{O}(V)$, $\boldsymbol{O}^+(V)$ и $\boldsymbol{\Omega}(V)$, когда V — изотропное невырожденное пространство, а поле F совершенно; это обобщало результаты Дьёдонне, описавшего автоморфизмы группы $\boldsymbol{\Omega}(V)$, когда V — невырожденное пространство размерности $\geqslant 10$, а F — конечное поле. Методы обеих упомянутых работ существенно опирались на наличие в группе инволюций. Используя методику О'Миры, Коннорс в работе [63] описал автоморфизмы групп $\boldsymbol{O}(V)$, $\boldsymbol{O}^+(V)$, $\boldsymbol{\Omega}(V)$ и $\boldsymbol{O}'(V)$ в случае, когда V — невырожденное пространство размерности $\geqslant 10$ с квадратичной формой Q, а F—произвольное поле характеристики 2, содержащее более двух элементов. Именно, *если Δ — любая из четырех указанных групп, то всякий ее автоморфизм Λ имеет вид*

$$\Delta(\sigma) = g\sigma g^{-1}, \quad \sigma \in \Delta,$$

где g — полулинейный автоморфизм пространства V, сохраняющий форму Q, т. е. при подходящем $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, удовлетворяющий соотношению

$$Q(gx) = \alpha \cdot Q(x)^{\mu}, \quad x \in V$$

(*здесь μ — автоморфизм поля F, ассоциированный с g*).

В последующей работе [71] Коннорс ослабил требование невырожденности пространства V в случае полной ортогональной группы $\boldsymbol{O}(V)$, наложив, однако, некоторые ограничения на поле F.

Теорию изоморфизмов для конгруэнц-подгрупп классических групп продолжал разрабатывать Солацци (см. его работы в настоящем сборнике). В статье [69] он доказал, в частности, что симплектические и унитарные конгруэнц-группы над областями целостности характеристики $\neq 2$ не изоморфны, если их индексы Витта $\geqslant 3$.

В исключительном двумерном случае автоморфизмы конгруэнц-групп исследовал Ю. И. Мерзляков [68]. Пусть $\mathfrak{o}$ — область целостности с единицей и полем частных F характеристики $\neq 2$, $\mathfrak{a}$ — ее идеал, $\boldsymbol{GL}_2(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ — ядро естественного гомоморфизма $\boldsymbol{GL}_2(\mathfrak{o}) \to \boldsymbol{GL}_2(\mathfrak{o}/\mathfrak{a})$, G — произвольная подгруппа группы $\boldsymbol{GL}_2(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$, содержащая все ее верхние и нижние уни-

треугольные матрицы. *Если идеал* $\mathfrak{a}$ *квазирегулярен, то каждый автоморфизм* Λ *группы* G *имеет вид*

$$\Lambda(x) = \chi(x)\, g x^{\sigma} g^{-1}, \quad x \in G,$$

где $\sigma \in \mathrm{Aut}\, F$, $g \in \boldsymbol{GL}_2(F)$, $\chi \in \mathrm{Hom}(G, F^*)$. *При этом* σ *и* χ *определяются автоморфизмом* Λ *однозначно, а* g — *однозначно с точностью до умножения на скалярную матрицу.* В работе [68] построен также пример, показывающий, что если идеал $\mathfrak{a}$ не квазирегулярен, то группа G может иметь „нестандартные" автоморфизмы. Это свидетельствует, в частности, о том, что построение теории автоморфизмов двумерных групп, богатых трансвекциями, должно быть нелегкой задачей.

Продолжая тему, начатую работой [58] (см. настоящий сборник, стр. 176), Маккин и Макдональд [73] исследовали автоморфизмы симплектической группы $\boldsymbol{Sp}_n$ над локальным кольцом. Автоморфизмы этой группы над произвольным полем были найдены Хуа Ло-геном еще в 1948 г. [3], затем Райнер [13] описал автоморфизмы $\boldsymbol{Sp}_n$ над кольцом $\mathbb{Z}$, а Янь Ши-цзянь [21] и О'Мира [41] — над произвольной областью целостности. Пусть $\mathfrak{o}$ — коммутативное локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов $k = \mathfrak{o}/\mathfrak{m}$, V — симплектическое пространство над $\mathfrak{o}$. В работе [73] доказывается, что *если* $n \geqslant 6$, *а поле* k *имеет характеристику* $\neq 2$ *и отлично от поля из трех элементов, то всякий автоморфизм* Λ *стандартной симплектической группы* $\boldsymbol{Sp}_n(V)$ *имеет вид*

$$\Lambda(x) = \chi(x)\, g x g^{-1}, \quad x \in \boldsymbol{Sp}_n(V),$$

где g — *полулинейный автоморфизм пространства* V, χ — *гомоморфизм группы* $\boldsymbol{Sp}_n(V)$ *в ее центр.* В отличие от работы [58], опиравшейся на вычислительную технику Янь Ши-цзяня [32] (см. настоящий сборник, стр. 226), в статье [73] используются основная теорема проективной геометрии *над коммутативным кольцом* [46] (см. настоящий сборник, стр. 168) и, косвенно, метод О'Миры — его прямое применение наталкивается, как и в [58], на трудности, связанные с делителями нуля.

Г. А. Носков [78] описал автоморфизмы группы $\boldsymbol{GL}_n(\mathfrak{o})$, где $\mathfrak{o}$ — коммутативное кольцо с единицей и обратимым элементом 2, не порождаемое делителями нуля, причем пространство $\mathrm{Max}(\mathfrak{o})$ его максимальных идеалов, снабженное топологией Зарисского, нётерово и имеет конечную комбинаторную размерность, а $n \geqslant 2 + \dim \mathrm{Max}(\mathfrak{o})$. Интересно было бы

выяснить, существуют ли здесь „нестандартные" автоморфизмы при (достаточно большом) $n \leqslant 1 + \dim \operatorname{Max}(\mathfrak{o})$.

Отметим, наконец, что в рассматриваемый период было опубликовано полное доказательство результатов Бореля и Титса [62], анонсированных в [56] (см. настоящий сборник, стр. 218).

БИБЛИОГРАФИЯ

1928

1. O. Schreier, B. L. van der Waerden, Die Automorphismen der projektiven Gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **6** (1928), 303—322.

1946

2. Ло-кен Хуа, Автоморфизмы действительной симплектической группы, *ДАН СССР*, **53** № 4 (1946), 307—310.

1948

3. L. K. Hua, On the automorphisms of the symplectic group over any field, *Ann. Math.*, **49**, № 4 (1948), 739—759.

1950

4. C. E. Rickart, Isomorphic groups of linear transformations, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 451—464.

1951

5. J. Dieudonné, On the automorphisms of the classical groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, № 2 (1951), 1—95.
6. L. K. Hua, Supplement to the paper of Dieudonné on the automorphisms of classical groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, № 2 (1951), 96—122.
7. L. K. Hua, I. Reiner, Automorphisms of the unimodular group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 331—348.
8. C. E. Rickart, Isomorphic groups of linear transformations, II, *Amer. J. Math.*, **73**, № 3 (1951), 697—716.
9. C. E. Rickart, Isomorphisms of infinite-dimensional analogues of the classical groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **57**, № 6 (1951), 435—448.

1952

10. L. K. Hua, I. Reiner, Automorphisms of the projective unimodular group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72**, № 3 (1952), 467—473.

1953

11. L. K. Hua, C. H. Wan, On the automorphisms and isomorphisms of linear groups, *J. Chinese Math. Soc.*, **2** (1953), 1—32.

1955

12. J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, Berlin — Höttingen — Heidelberg, 1955; seconde édition, 1963; troisiéme édition, 1971. [Русский перевод третьего издания: Ж. Дьёдонне, Геометрия классических групп, «Мир», М., 1974.]
13. I. Reiner, Automorphisms of the symplectic modular group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80**, № 1 (1955), 35—50.
14. J. H. Walter, Isomorphisms between projective unitary groups, *Amer. J. Math.*, **77**, № 4 (1955), 805—844.

1957

15. J. Landin, I. Reiner, Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain, *Ann. Math.*, **65**, № 3 (1957), 519—526.
16. I. Reiner, A new type of automorphism of the general linear group over a ring, *Ann. Math.*, **66**, № 3 (1957), 461—466.
17. C. H. Wan, Automorphisms of the modular group, Шусюэ цзиньчжань, **3**, № 2 (1957), 216—233 (на кит. языке).
18. C. H. Wan, On the automorphisms of linear groups over a non-commutative Euclidean ring of characteristic $\neq 2$, *Sci. Record*, **1**, № 1 (1957), 5—8.
19. S. C. Yien, A system of relations of unimodular matrices and automorphisms of unimodular group, *Sci. Record*, **1**, № 1 (1957), 13—17.
20. S. C. Yien, Linear groups over a commutative integral domain, *Sci. Record*, **1**, № 5 (1957), 297—300.
21. S. C. Yien, Symplectic groups over a commutative ring, *J. Peking Normal Univ. Nat. Sci.*, **2** (1957), 23—46 (на кит. языке).

1958

22. J. Landin, I. Reiner, Automorphisms of the Gaussian unimodular group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87**, № 1 (1958), 76—89.
23. J. Landin, I. Reiner, Automorphisms of the two-dimensional general linear group over a Euclidean ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9**, № 2 (1958), 209—216.
24. Z. X. Wan, On the automorphisms of linear groups over a non-commutative principal ideal domain of characteristic $\neq 2$, *Sci. Sinica*, **7**, № 9 (1958), 885—933.

1960

25. R. Steinberg, Automorphisms of finite linear groups, *Canad. J. Math.*, **12**, № 4 (1960), 606—615.

1962

26. M. J. Wonenburger, The automorphisms of the group of similitudes and some related groups, *Amer. J. Math.*, **84**, № 4 (1962), 600—614.
27. M. J. Wonenburger, The automorphisms of $PO_8^+(Q)$ and $PS_8^+(Q)$, *Amer. J. Math.*, **84**, № 4 (1962), 635—641.

1963

28. L. K. Hua, Z. X. Wan, Classical groups, Science and Technology Press, Shanghai, 1963 (на кит. языке).

29. Z. X. Wan, Y. X. Wang, On the automorphisms of symplectic groups over a field of characteristic 2, *Sci. Sinica*, **12**, № 3 (1963), 289—315.

30. M. J. Wonenburger, The automorphisms of the group of rotations and its projective group corresponding to quadratic forms of any index, *Canad. J. Math.*, **15**, № 2 (1963), 302—303.

1964

31. M. J. Wonenburger, The automorphisms of $U_n^+(k, f)$ and $PU_n^+(k, f)$, *Rev. Mat. Hisp.-Amer.*, **24**, № 1—2 (1964), 52—65.

1965

32. S. J. Yan, Linear groups over a ring, *Chinese Math.*, **7**, № 2 (1965), 163—179.

33. J. H. Yang, On the automorphisms of the unitary groups over fields of characteristic 2, *Acta Math. Sinica*, **15**, № 4 (1965), 582—597 (на кит. языке).

1966

34. P. M. Cohn, On the structure of the GL_2 of a ring, *Publs math. IHES*, № 30 (1966), 5—53.

35. O. T. O'Meara, The automorphisms of the linear groups over any integral domain, *J. reine angew. Math.*, **223** (1966), 56—100.

36. C. H. Xu, On the automorphisms of orthogonal groups over perfect fields of characteristic 2, *Chinese Math.*, **8**, № 4 (1966), 475—523.

1967

37. E. Spiegel, On the automorphisms of the unitary group over a field of characteristic 2, *Amer. J. Math.*, **89**, № 1 (1967), 43—50.

38. E. Spiegel, On the automorphisms of the projective unitary group over a field of characteristic 2, *Amer. J. Math.*, **89**, № 1 (1967), 51—55.

1968

39. A. Borel, On the automorphisms of certain subgroups of semi-simple Lie groups, Proc. Bombay Colloquium on Algebraic Geometry, 1968, 43—73.

40. A. Borel, J. Tits, On «abstract» homomorphisms of simple algebraic groups, Proc. Bombay Colloquium on Algebraic Geometry, 1968, 75—82.

41. O. T. O'Meara, The automorphisms of the standard symplectic group over any integral domain, *J. reine angew. Math*, **230** (1968), 104—138.

42. O. T. O'Meara, The automorphisms of the orthogonal groups $\Omega_n(V)$ over fields, *Amer. J. Math.*, **90**, № 4 (1968), 1260—1306.

43. R. Steinberg, Lectures on Chevalley groups, Yale University, 1968. [Русский перевод: Р. Стейнберг, Лекции о группах Шевалле, «Мир», 1974.]

1969

44. P. M. Cohn, Automorphisms of two-dimensional linear groups over Euclidean domains, *J. Lond. Math. Soc.*, **1**, № 2 (1969), 279—292.

45. J. E. Humphreys, On the automorphisms of infinite Chevalley groups, *Canad. J. Math.*, **21**, № 4 (1969), 908—911.

46. M. Ojanguren, R. Sridharan, A note on the fundamental theorem of projective geometry, *Comm. Math. Helv.*, **44**, № 3 (1969), 310—315.

47. O. T. O'Meara, The automorphisms of the orthogonal groups and their congruence subgroups over arithmetic domains, *J. reine angew. Math.*, **238** (1969), 169—206.
48. O. T. O'Meara, Group-theoretic characterization of transvections using CDC, *Math. Z.*, **110**, № 5 (1969), 385—394.
49. O. T. O'Meara, H. Zassenhaus, The automorphisms of the linear congruence groups over Dedekind domains, *J. Number Theory*, **1**, № 2 (1969), 211—221.
50. H. Zassenhaus, Characterization of unipotent matrices, *J. Number Theory*, **1**, № 2 (1969), 222—230.

1971

51. A. A. Johnson, The automorphisms of unitary groups over a field of characteristic 2, *Amer. J. Math.*, **93**, № 2 (1971), 367—384.
52. Ю. И. Мерзляков, Линейные группы, в сб. «Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1970», М., 1971, 75—110.
53. O. T. O'Meara, The integral classical groups and their automorphisms, Number Theory Institute, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **20** (1971), 76—85.
54. R. E. Solazzi, Isomorphism theory of congruence groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77**, № 1 (1971), 164—168.
55. E. Spiegel, Automorphisms of unitary groups, *J. Algebra*, **19**, № 4 (1971), 541—546.
56. J. Tits, Homomorphismes et automorphismes «abstraits» de groupes algébriques et arithmétiques, Actes Conrès intern. Math., 1970, Tome 2, Paris, 1971, 349—355.

1972

57. A. J. Hahn, On the homomorphisms of the integral linear groups, *Math. Ann.*, **197**, № 3 (1972), 234—250.
58. J. Pomfret, B. R. McDonald, Automorphisms of $\boldsymbol{GL}_n(R)$, R a local ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **173** (1972), 379—388.
59. R. E. Solazzi, On the isomorphisms between certain congruence groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **35**, № 2 (1972), 405—410.
60. R. E. Solazzi, The automorphisms of certain subgroups of $\boldsymbol{PGL}_n(V)$, *Illinois J. Math.*, **16**, № 2 (1972), 330—348.
61. R. E. Solazzi, The automorphisms of the symplectic congruence groups, *J. Algebra*, **21**, № 1 (1972), 91—102.

1973

62. A. Borel, J. Tits, Homomorphismes «abstraits» de groupes algébriques simples, *Ann. Math.*, **97**, № 3 (1973), 499—571.
63. E. A. Connors, Automorphisms of orthogonal groups in characteristic 2, *J. Number Theory*, **5**, № 6 (1973), 477—501.
64. В. С. Дроботенко, Э. С. Дроботенко, Е. Я. Погориляк, Автоморфизмы линейных групп над коммутативными кольцами с условием минимальности, *УМН*, **28**, № 6 (1973), 205—206.
65. M. H. Dull, Automorphisms of $\boldsymbol{PSL}_2$ over domains with few units, *J. Algebra*, **27**, № 2 (1973), 372—379.
66. A. J. Hahn, The isomorphisms of certain subgroups of the isometry groups of reflexive spaces, *J. Algebra*, **27**, № 2 (1973), 205—242.
67. A. A. Johnson, The automorphisms of the unitary groups over infinite fields, *Amer. J. Math.*, **95**, № 1 (1973), 87—107.
68. Ю. И. Мерзляков, Автоморфизмы двумерных конгруэнц-групп, *Алгебра и логика*, **12**, № 4 (1973), 468—477.

69. R. E. Solazzi, On the isomorphisms between certain congruence groups, II, *Canad. J. Math.*, **25**, № 5 (1973), 1006—1014.
70. R. E. Solazzi, The automorphisms of the unitary groups and their congruence subgroups, *Illinois J. Math.*, **17**, № 1 (1973), 153—165.

1974

71. E. A. Connors, Automorphisms of the orthogonal group of a defective space, *J. Algebra*, **29**, № 1 (1974), 113—123.
72. M. H. Dull, Automorphisms of the two-dimensional linear groups over integral domains, *Amer. J. Math.*, **96**, № 1 (1974), 1—40.
73. L. McQueen, B. R. McDonald, Automorphisms of the symplectic group over a local ring, *J. Algebra*, **30**, № 1—3 (1974), 485—495.
74. O. T. O'Meara, Lectures on linear groups, Providence, Rhode Island, 1974.

1975

75. A. J. Hahn, On the isomorphisms of the projective orthogonal groups and their congruence subgroups, *J. reine angew. Math.*, **273** (1975), 1—22.
76. A. J. Hahn, Isomorphisms of the integral classical groups and their congruence subgroups, *Amer. J. Math.*, **19**, № 4, (1975), 865—887.
77. C. Y. Ho, On the automorphisms of $SL_2(K)$, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, **3** (1975), 107—112.
78. Г. А. Носков, Автоморфизмы группы $GL_n(\mathfrak{o})$ при $\dim \mathrm{Max}(\mathfrak{o}) \leqslant n-2$, *Матем. заметки*, **17**, № 2 (1975), 285—291.

1976

79. E. A. Connors, The automorphisms of $O_4^+(V)$ in the anisotropic case, *Proc. Amer. Math., Soc.*, **54** (1976), 16—18.
80. B. R. McDonald, Automorphisms of $GL_n(R)$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 145—159.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

анизотропное подпространство 203
— пространство 9
анизотропный вектор 9, 203

большая дилатация 75

вектор анизотропный 9, 203
— изотропный 9, 203
вполне вырожденное вращение 207
— — подпространство 189, 203
— изотропное пространство 9
вращение вполне вырожденное 207
— гиперболическое 207
— плоское 207
второй трюк для доказательства простоты 85
вырожденная изометрия 10
вырожденное подпространство 203
вычет 62
вычетное пространство 10, 62, 189, 204

гармоническое разбиение 150
геометрическое преобразование 59, 60
гиперболическая плоскость 9, 204
гиперболическое вращение 207
гиперплоскость 58, 59
главный идеал 157
гомоморфизм полуалгебраический 219
— полуцелый 220
гомотетия 26, 196
— центральная 37
группа импримитивная 88
— коллинеарная 97
— коллинеаций 97
— k-кратно транзитивная 87
— общая линейная 177, 226
— примитивная 88
— проективная коллинеарная 98
— — общая линейная 61
— — симплектическая 191
— — специальная линейная 61
— проективностей 61
— симплектическая 189, 199
— специальная линейная 177, 226
— транзитивная 88
— унитарная 204
GE-кольцо 31
GE_2-кольцо 33
— универсальное 33

дилатация 65
— большая 75
дискретная норма 34
дискретно нормированное кольцо 34
— упорядоченное кольцо 36
дополнение ортогональное 189
дробное замыкание 251
дробный идеал 156

замыкание дробное 251

идеал 156
— главный 157
— дробный 156
— целый 157
идемпотент 178
изометрия вырожденная 10
— регулярная 10
изоморфизм контраградиентный 104
— проективный контраградиентный 105
изоморфизм, сохраняющий ортогональность 25, 197
— унитарный полулинейный 209
изотропное подпространство 203
— пространство 9
изотропный вектор 9, 203
импримитивная группа 88
инволюция 35, 64, 178, 232
— типа $(r, n-r)$ 53, 178
$(r, n-r)$-инволюция 53, 232
индекс Витта 9, 204

квазисимметрия 11, 207
— проективная 207
коллинеарная группа 97

коллинеация 93, 97
— контраградиентная 103
— проективная 93, 98
кольцо дискретно нормированное 34
— — упорядоченное 36
— квазисвободное для GE_2 34
— обобщенно евклидово 31
— основное 220
— с единственной стандартной формой для EG_2 34
— универсальное для GE_2 33
GE-кольцо 31
GE_2-кольцо 33
k-кольцо 32
— остепененное 36
конгруэнц-группа проективная симплектическая 200
— — унитарная 216
— симплектическая 200
— унитарная 216
конгруэнц-подгруппа общая 186
— специальная 186
контраградиент 103
контраградиентная коллинеация 103
контраградиентный изоморфизм 104
кососимметричный элемент 50
k-кратно транзитивная группа 87

матрица отображения 92
— унимодулярная 161
— целая 161
— элементарная 70
модуль ограниченный 158, 199, 215, 220

неподвижное пространство 62, 189, 204
норма 34
— дискретная 34

обобщенно евклидово кольцо 31
общая конгруэнц-подгруппа 186
— линейная группа 177, 226
ограниченный модуль 158, 199, 215, 220
ортогональное дополнение 189
основное кольцо 220
остепененное k-кольцо 36
остепеняющая функция 36
отображение полулинейное 90, 91
— транспонированное 102

первый трюк для доказательства простоты 85
перестановочность проективная 108
плоское вращение 207
плоскость 58, 59
— гиперболическая 9, 204
подгруппа, богатая проективными трансвекциями 109
— — трансвекциями 109
— имеющая достаточно много проективных трансвекций 188, 192, 206
— — — — трансвекций 188, 191, 206
подпространство анизотропное 203
— вполне вырожденное 189, 203
— вырожденное 203
— изотропное 203
— регулярное 189, 203
полуалгебраический гомоморфизм 219
полулинейное отображение 90, 91
полуцелый гомоморфизм 220
представитель 100
представляющая трансвекция 70
преобразование геометрическое 59
— проективное геометрическое 60
— — унипотентное 107
— унипотентное 107
— унитарное 204
примитивная группа 88
проективная группа коллинеаций 98
— квазисимметрия 207
— коллинеарная группа 98
— коллинеация 93, 98
— общая линейная группа 61
— перестановочность 108
— симплектическая конгруэнц-группа 200
— — группа 191
— специальная линейная группа 61
— трансвекция 70, 191
— унитарная конгруэнц-группа 216
проективное геометрическое преобразование 60
— пространство 59, 168
— унипотентное преобразование 107
проективность 59, 61, 168
проективный контраградиентный изоморфизм 105
пространство анизотропное 9
— вполне изотропное 9
— вычетное 10, 62, 189, 204
— изотропное 9
— неподвижное 62, 189, 204
— проективное 59, 168
— регулярное симплектическое 189
— собственное 10
прямая 58, 59
— собственная 190, 204

радикал 189, 203
разбиение гармоническое 150

множества 88, 150
растяжение 11, 61
регулярная изометрия 10
регулярное подпространство 189, 203
— симплектическое пространство 189
R-автоморфизм 251

сдвиг 207
симметричный элемент 50
симплектическая группа 189, 199
— конгруэнц-группа 200
собственная прямая 190, 204
собственное пространство изометрии 10
специальная конгруэнц-подгруппа 186
— линейная группа 177, 226
стандартная форма 33

тильда-отображение 75
транзитивная группа 88
трансвекция 10, 65, 190, 204
— представляющая 70
— проективная 70, 191
— элементарная 70, 177
транспонированное отображение 102
трюк для доказательства простоты второй 85
— — — — первый 85

универсальное GE_2-кольцо 33
унимодулярная матрица 161
унипотентное преобразование 107
унитарная группа 204
— конгруэнц-группа 216
унитарное преобразование 204
унитарный полулинейный изоморфизм 209
U-антигомоморфизм 38
U-гомоморфизм 38

форма стандартная 33
— эрмитова 203
функция остепеняющая 36

целая матрица 161
целый идеал 157
центральная гомотетия 37

элемент кососимметричный 50
— симметричный 50
элементарная матрица 70
— трансвекция 70, 177
эрмитова форма 203

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5

А. Джонсон. Автоморфизмы унитарных групп над бесконечными полями. *Перевод В. А. Чуркина* 7

§ 1. Основные понятия и обозначения (8). § 2. Свойства квазисимметрий и трансвекций (11). § 3. S_x в случае анизотропного вектора x (14). § 4. S_x в случае изотропного вектора x (24). § 5. Изоморфизмы Φ_g и P_χ (25). § 6. Автоморфизмы группы Δ (27). Список литературы (30).

П. Кон. О строении группы GL_2 над кольцом. *Перевод В. А. Чуркина* 31

Из введения (31). Сводка необходимых результатов из § 2—8 (32). § 11. Построение гомоморфизмов между общими линейными группами (37). § 12. Анализ изоморфизмов общих линейных групп (40). Список литературы (56).

О. О'Мира. Лекции о линейных группах. *Перевод Г. А. Носкова и Ю. В. Сосновского* 57

Обозначения 58

Глава 1. Введение 59

§ 1.1. Геометрические, линейные и проективные преобразования (59). § 1.2. Растяжения (61). § 1.3. Вычеты (62). § 1.4. Трансвекции (65). § 1.5. Матрицы (69). § 1.6. Проективные трансвекции (70). § 1.7. Комментарии (72).

Глава 2. Теоремы о порождении 73

§ 2.1. Порождение трансвекциями (73). § 2.2. Комментарии (80)

Глава 3. Структурная теория 80

§ 3.1. Порядки линейных групп (80). § 3.2. Центры (82). § 3.3. Коммутанты (82). Теоремы о простоте (84). § 3.5. Другой подход к простоте (87). § 3.6. Комментарии (90).

Глава 4. Коллинеации и проективная геометрия 90

§ 4.1. Полулинейная алгебра (90). § 4.2. Основная теорема проективной геометрии (93). § 4.3. Группы $\Gamma L_n(V)$ и $P\Gamma L_n(V)$ (97). § 4.4. Изоморфизмы Φ_g (100). § 4.5. Контраградиент (102). § 4.6. Комментарии (105).

Глава 5. Изоморфизмы линейных групп 106

§ 5.1. Предварительные сведения (106). § 5.2. Группы, богатые трансвекциями (109). § 5.3. *CDC* в линейном случае (113). § 5.4. Сохранение проективных трансвекций в линейном случае (120). § 5.5. Теоремы об изоморфизмах в общем случае (128).

§ 5.6. Теоремы об изоморфизмах над полями (141). § 5.7. Теоремы об изоморфизмах над областями целостности (156). § 5.8. Комментарии (165).
Список литературы 166

М. Оянгурен, Р. Сридхаран. Заметка об основной теореме проективной геометрии. *Перевод Г. А. Носкова* 168

§ 1. Проективные пространства и проективности (168). § 2. Теорема (170). § 3. Пример (174). Список литературы (175)

Ж. Помфрэ, Б. Макдональд. Автоморфизмы группы GL_n над локальным кольцом. *Перевод Г. А. Носкова* 176

§ 1. Введение и история вопроса (176). § 2. Предварительные замечания (177). § 3. Автоморфизмы группы $GL_n(R)$ (179). Список литературы (186).

Р. Солацци. Автоморфизмы симплектических конгруэнц-групп. *Перевод В. А. Чуркина* 188

§ 1. Предварительные замечания (189). § 2. Проективные симплектические группы (191). § 3. Вычисления с двойными централизаторами (193). § 4. Применение к теории автоморфизмов (196). § 5. Автоморфизмы конгруэнц-групп (199). Список литературы (201).

Р. Солацци. Автоморфизмы унитарных групп и их конгруэнц-подгрупп. *Перевод В. А. Чуркина* 202

§ 1. Предварительные замечания (203). § 2. Результаты о двойных централизаторах (208). § 3. Применение к теории автоморфизмов (209). § 4. Автоморфизмы унитарных конгруэнц-групп (215). Список литературы (217).

Ж. Титс. Абстрактные гомоморфизмы и автоморфизмы алгебраических и арифметических групп. *Перевод Ю. И. Мерзлякова* 218

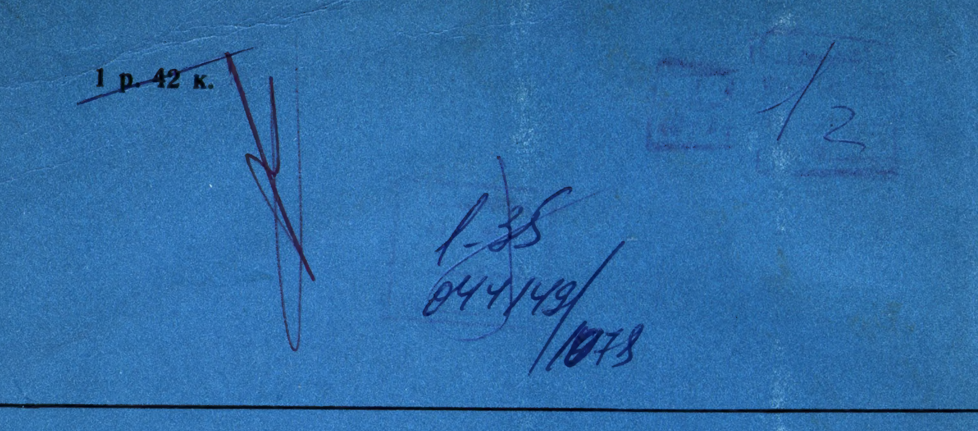
Произвольные области целостности (220). Локальные кольца и арифметические кольца (220). Поля (221). Дополнение: обобщение основной теоремы проективной геометрии (222). Не полупростые группы: примеры (223). Список литературы (223)

Янь Ши-цзянь. Линейные группы над кольцом. *Перевод Г. А. Носкова* 226

§ 1. Введение (226). § 2. Теорема о «внутреннем» изоморфизме и некоторые элементарные применения (227). § 3. Инволюции (231). § 4. Вид элемента $\mathscr{A}(B_{ij}(1))$ (235). § 5. Доказательство основной теоремы (239). § 6. Усиление результатов предыдущих параграфов (244). Список литературы (249)

Дополнение редактора. Обзор новейших результатов об автоморфизмах классических групп (*Ю. И. Мерзляков*) 250
Библиография 255

Предметный указатель 260





ИЗДАТЕЛЬСТВО "М И Р" МОСКВА


АВТОМОРФИЗМЫ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП